

A photograph of students in a classroom taking a test. In the foreground, a student in a white t-shirt is writing in a notebook with a purple pen. Behind him, a student in a blue t-shirt is also writing. The background shows other students and a classroom setting.

FORMELSAMLING

FOLKESKOLENS

AFSLUTTENDE PRØVER

I MATEMATIK



Redaktion og tilrettelæggelse af indhold for Skolestyrelsen:
Lektor Hans Jørgen Beck, adjunkt Thomas Kaas og fagkonsulent Klaus Fink

Grafisk tilrettelæggelse: Schwander Kommunikation – www.schwander.dk

Foto: Colourbox

1. udgave, februar 2010

ISBN (WWW) 978-87-92140-60-9

Internetadresse: www.skolestyrelsen.dk

Publikationen findes kun i elektronisk format

Udgivet af Styrelsen for Evaluering og Kvalitetsudvikling af Folkeskolen
(Skolestyrelsen)

Eventuelle henvendelser af indholdsmæssig karakter rettes til Skolestyrelsen,
Kontor for Afgangsprøver, Test og Evalueringer

Indhold

Tal og algebra

- 6 Tal
- 6 Primaltal
- 6 Sammensatte tal
- 8 Intervaller
- 8 Brøker
- 10 Kvadratrødder
- 10 Potenser
- 12 Parentesregler
- 14 Procent

Økonomi

- 18 Rente
- 18 Sammensat rente
- 20 Valuta

Geometri

- 22 Trekanter
- 22 Linjer ved trekanten
- 24 Areal af en trekant
- 26 Ensvinklede trekanter
- 26 Ligebenet trekant
- 26 Ligesidet trekant
- 28 Retvinklet trekant
- 30 Trigonometri
- 32 Firkanter
- 32 Rektangel
- 32 Parallelogram
- 32 Trapez
- 34 Cirkler

Rumfang og overflade

- 36 Kasse
- 36 Prisme
- 36 Cylinder
- 38 Kegle
- 38 Pyramide
- 38 Kugle

Geometri – flytninger

- 40 Spejling
- 40 Parallelforskydning
- 42 Drejning

Geometri – tegning

- 44 Målestoksforhold

Geometri i et koordinatsystem

- 46 Koordinatsystemet
- 48 Ligning for ret linje
- 50 Grafisk ligningsløsning

Funktioner

- 52 Lineær funktion
- 54 Andre funktionstyper
- 54 Andengradsfunktion
- 56 Ligeform proportionalitet
- 56 Omvendt proportionalitet
- 58 Vækstfunktioner
- 58 Lineær vækst
- 58 Eksponentiel vækst

Statistik

- 60 Diagrammer for procentfordeling
- 62 Metoder til at beskrive observationssæt med enkeltobservationer
- 62 Metoder til at illustrere observationssæt med enkeltobservationer
- 66 Metoder til at beskrive grupperede observationssæt
- 68 Metoder til at illustrere grupperede observationssæt
- 70 Sammenligninger mellem observationssæt af forskellig størrelse
- 74 Metoder til at analysere observationssæt

Sandsynlighed

- 76 Statistisk sandsynlighed
- 78 Kombinatorisk sandsynlighed

Massefylde og fart

- 80 Massefylde
- 80 Fart

Måleenheder

- 82 Længde
- 82 Areal
- 84 Rumfang
- 84 Vægt

Forord til læreren

Denne formelsamling er udarbejdet i henhold til bekendtgørelse nr. 749 af 13. juli 2009, hvor der i bilag 1 om folkeskolens afgangsprøve står: "2.10. Til prøven må anvendes alle de hjælpemidler, som eleven har anvendt i den daglige undervisning, samt den af Undervisningsministeriet udgivne formelsamling.", og tilsvarende i bilag 2 om FS10: "2.5. Til prøven må anvendes alle de hjælpemidler, som eleven har anvendt i den daglige undervisning, samt den af Undervisningsministeriet udgivne formelsamling."

Hensigten med at udarbejde en særlig formelsamling til brug ved folkeskolens afsluttende prøver i matematik er bl.a. at afgrænse det fagsprog og de matematiske begreber, der uden yderligere forklaring kan indgå i de afsluttende prøver. Det kan derfor være en fordel, at eleverne har formelsamlingen til rådighed allerede fra 7. klasse, så der er god tid til at sætte sig ind i indholdet.

Formelsamlingen giver eksempler på fx diagramtyper, formler og faglige udtryksformer, der kan forventes at indgå i de skriftlige opgaver.

Denne udgave af formelsamlingen er fremstillet ud fra Fælles Mål 2009.

Formelsamlingen er opbygget således, at de fleste af de lige venstresider indeholder formler mv., næsten uden eksempler, mens eleverne på de kvadrerede højresider kan skrive eksempler og forklaringer, som han eller hun selv har fremstillet. Denne opdeling af formelsamlingen har sit udgangspunkt i Fælles Mål 2009, hvor det fastslås, at eleverne skal sættes i stand til at deltage i udvikling af strategier og metoder i forbindelse med de matematiske emner.

Formelsamlingen er ikke en matematisk opslagsbog eller et matematikleksikon i sædvanlig forstand. For eksempel er det i forbindelse med \sqrt{a} ikke angivet, at radikanden a skal være et ikke-negativt tal.

Det internationale enhedssystem, SI (Système International d'unités), som siden 1976 har været standard for størrelser og enheder i fx undervisningsmaterialer og offentlige publikationer, angiver, at rumfangsenheden liter kan benævnes som et l eller et L. Da bogstavet l nemt kan forveksles med cifferet 1, kan man med fordel anvende bogstavet L. I oversigten over enheder er liter derfor angivet med skrivemåden L.

Formelsamlingen må medbringes til prøven i matematisk problemløsning ved den skriftlige afgangsprøve i matematik og til den skriftlige prøve i matematik i 10. klasse. I disse prøver vil nødvendige formler, der ikke findes i formelsamlingen, blive givet i forbindelse med den konkrete opgave.

Ligeledes må formelsamlingen anvendes ved den mundtlige prøve.

Formelsamlingen må ikke anvendes ved prøven i matematiske færdigheder.

Forord til eleven

Denne formelsamling må du medbringe til afgangsprøven i matematisk problemløsning og til den skriftlige prøve i matematik i 10. klasse. Du må også bruge den til den mundtlige prøve. Formelsamlingen må ikke benyttes til prøven i matematiske færdigheder.

Formelsamlingen kan du bruge i dit daglige arbejde med faget matematik i 7.-10. klasse.

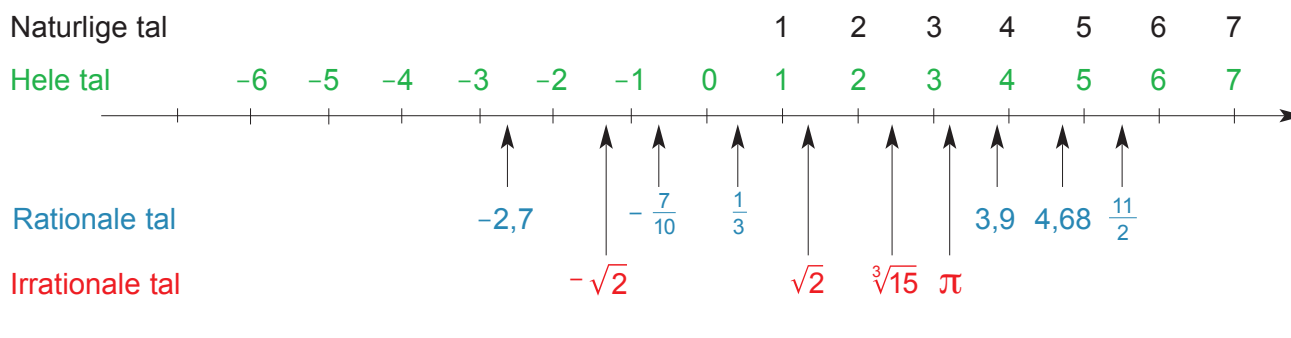
På venstresiderne kan du læse om formler og meget mere. På højresiderne kan du skrive dine egne noter, som du også må medbringe til afgangsprøvene.

På højresiderne kan du bl.a.:

- skrive formlerne i den form, du er mest fortrolig med
- skrive dine egne eksempler på, hvordan formlerne bruges
- skrive andre formler, du mener, du kan få brug for.

Tal og algebra

Tal



Primtal

Et primtal er et naturligt tal, som netop to tal går op i – nemlig 1 og tallet selv.

De første 25 primtal er

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Sammensatte tal

Et naturligt tal (større end 1), der ikke er et primtal, kaldes et sammensat tal. Et sammensat tal kan på netop én måde (på nær faktorenes rækkefølge) skrives som et produkt af primtal.

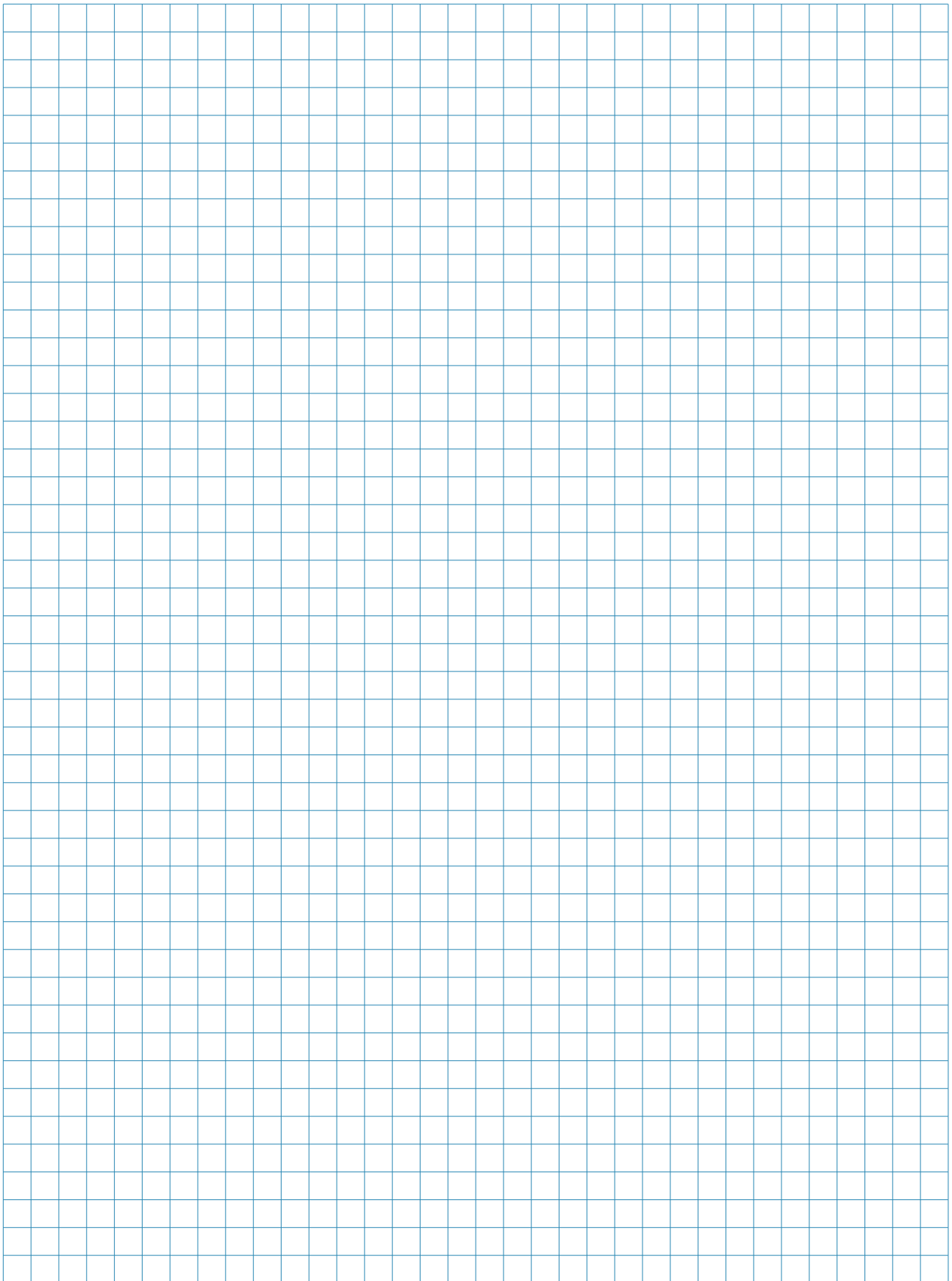
Eksempler:

21 er et sammensat tal, fordi $21 = 3 \cdot 7$

1827 er et sammensat tal, fordi $1827 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29 = 3^2 \cdot 7 \cdot 29$

2009 er et sammensat tal, fordi $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41 = 7^2 \cdot 41$

Til egne notater

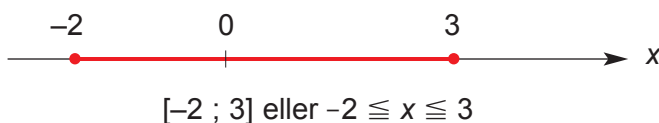


Intervaller

Eksempler på intervaller

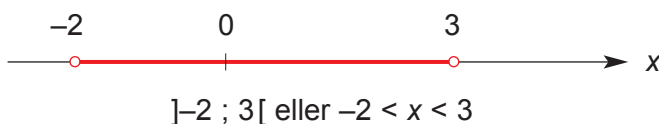
Lukket interval fra og med a til og med b .

$$[a ; b] \text{ eller } a \leq x \leq b$$



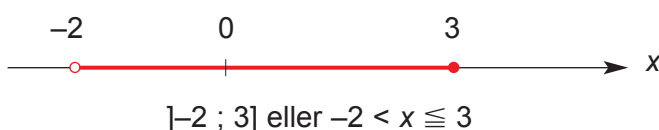
Åbent interval fra a til b .

$$]a ; b[\text{ eller } a < x < b$$



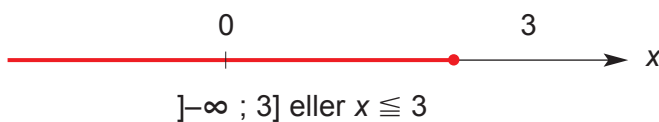
Halvåbent interval fra a til og med b .

$$]a ; b] \text{ eller } a < x \leq b$$



Halvåbent interval fra $-\infty$ til og med b .

$$]-\infty ; b] \text{ eller } x \leq b$$



Brøker

$$a : b = \frac{a}{b}$$

$$4 : 3 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}$$

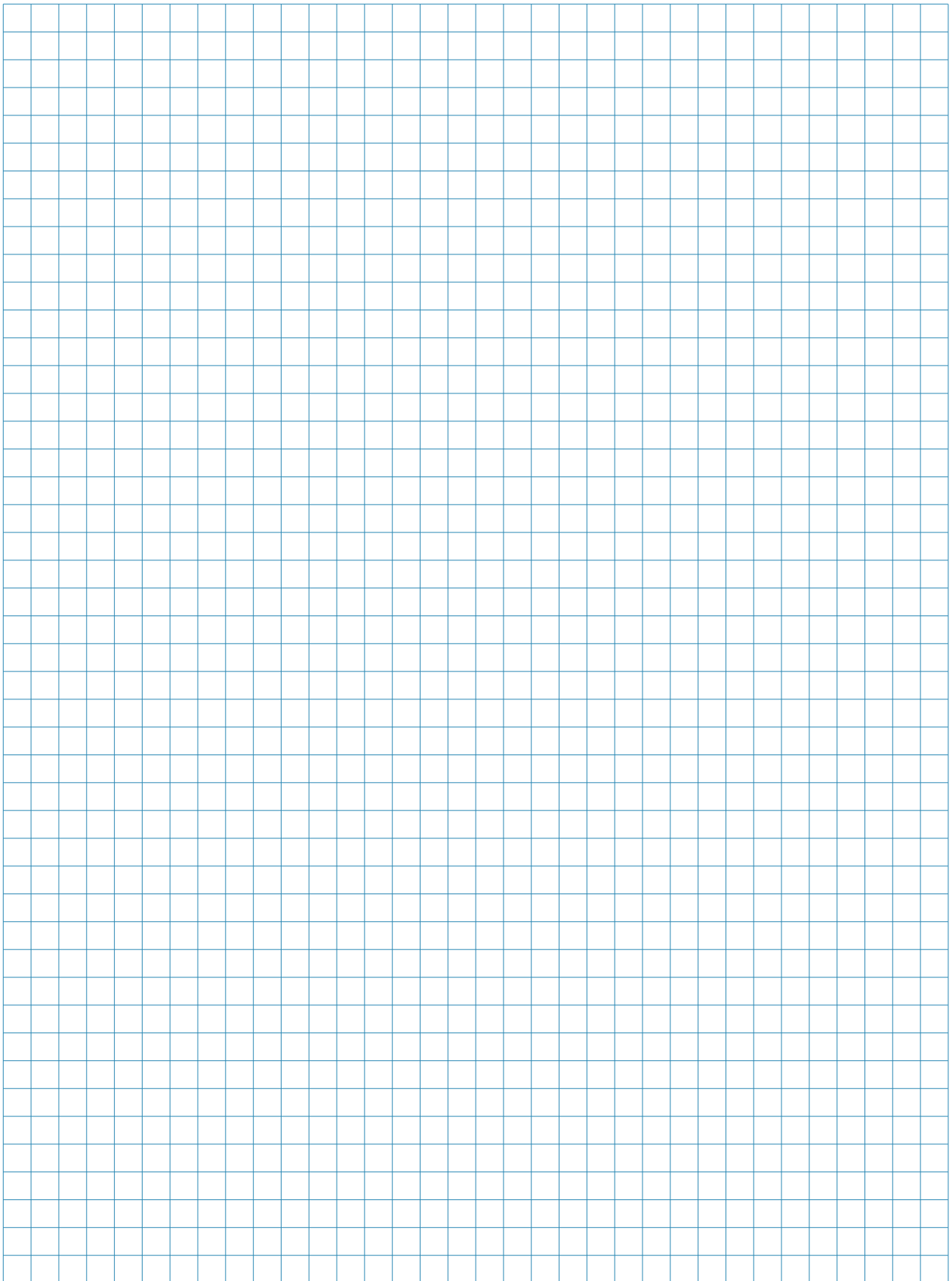
$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

Til egne notater



Kvadratrødder

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

Potenser

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ faktorer}}$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$a^0 = 1 \quad a \neq 0$$

$$10^0 = 1$$

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

$$(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10}$$

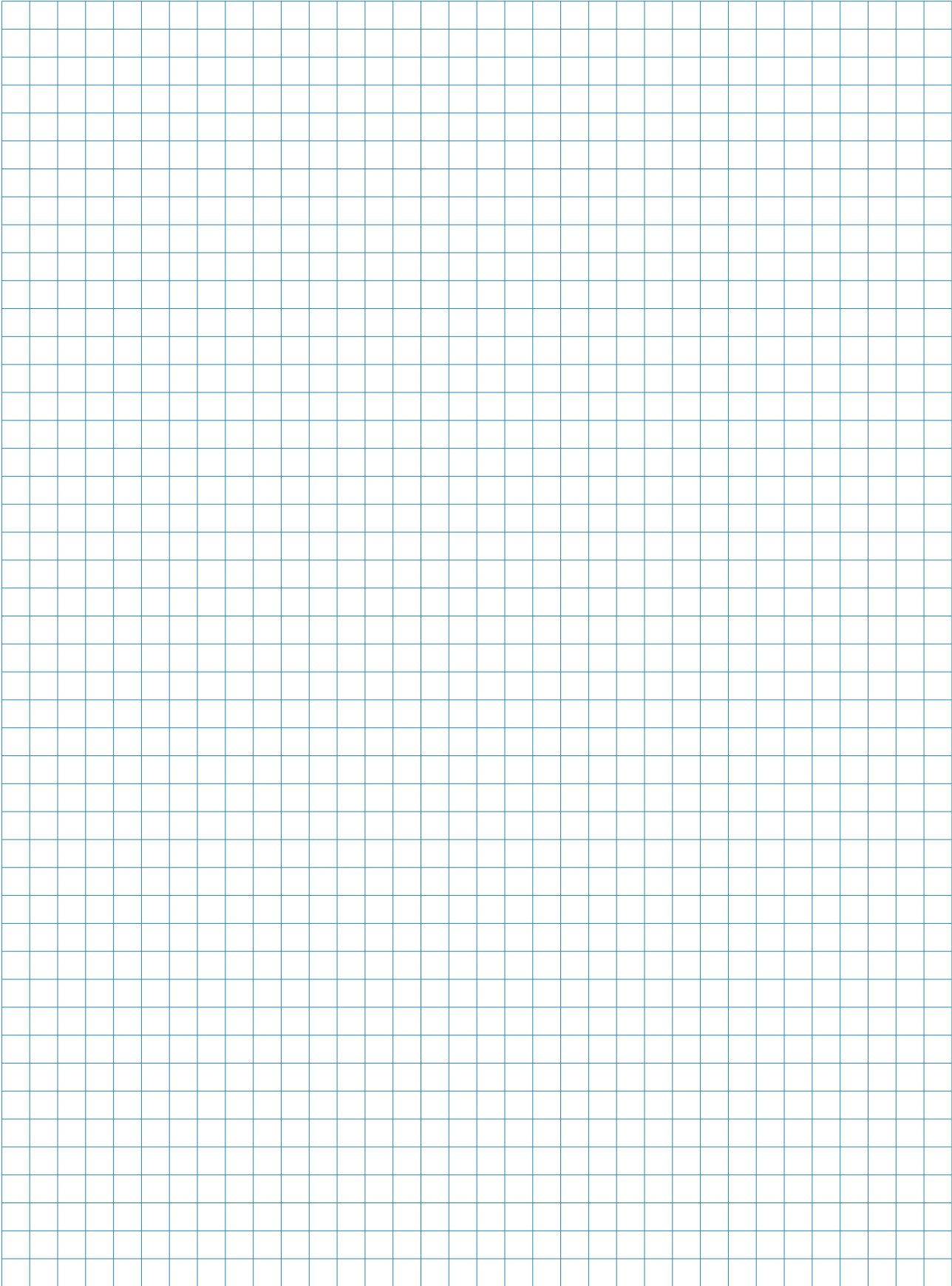
$$5,1 \cdot 10^6 = 5\,100\,000 = 5,1 \text{ mio.}$$

$$2,3 \mu\text{m} = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{m} = 0,0000023 \text{ m}$$

$$2 \cdot x^2 = 2 \cdot x \cdot x$$

$$(2 \cdot x)^2 = (2x) \cdot (2x) = 4x^2$$

Til egne notater



Parentesregler

$$a + (b - c + d) = a + b - c + d$$

Man kan hæve (fjerne) en "plusparentes" uden videre.

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d$$

Man kan hæve (fjerne) en "minusparentes", hvis man samtidig skifter fortegn på alle leddene i parentesens.

$$a \cdot (b - c + d) = a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d$$

Man ganger en flerleddet størrelse med et tal ved at gange hvert led med tallet.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>ac</i>	<i>ad</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	<i>bd</i>

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

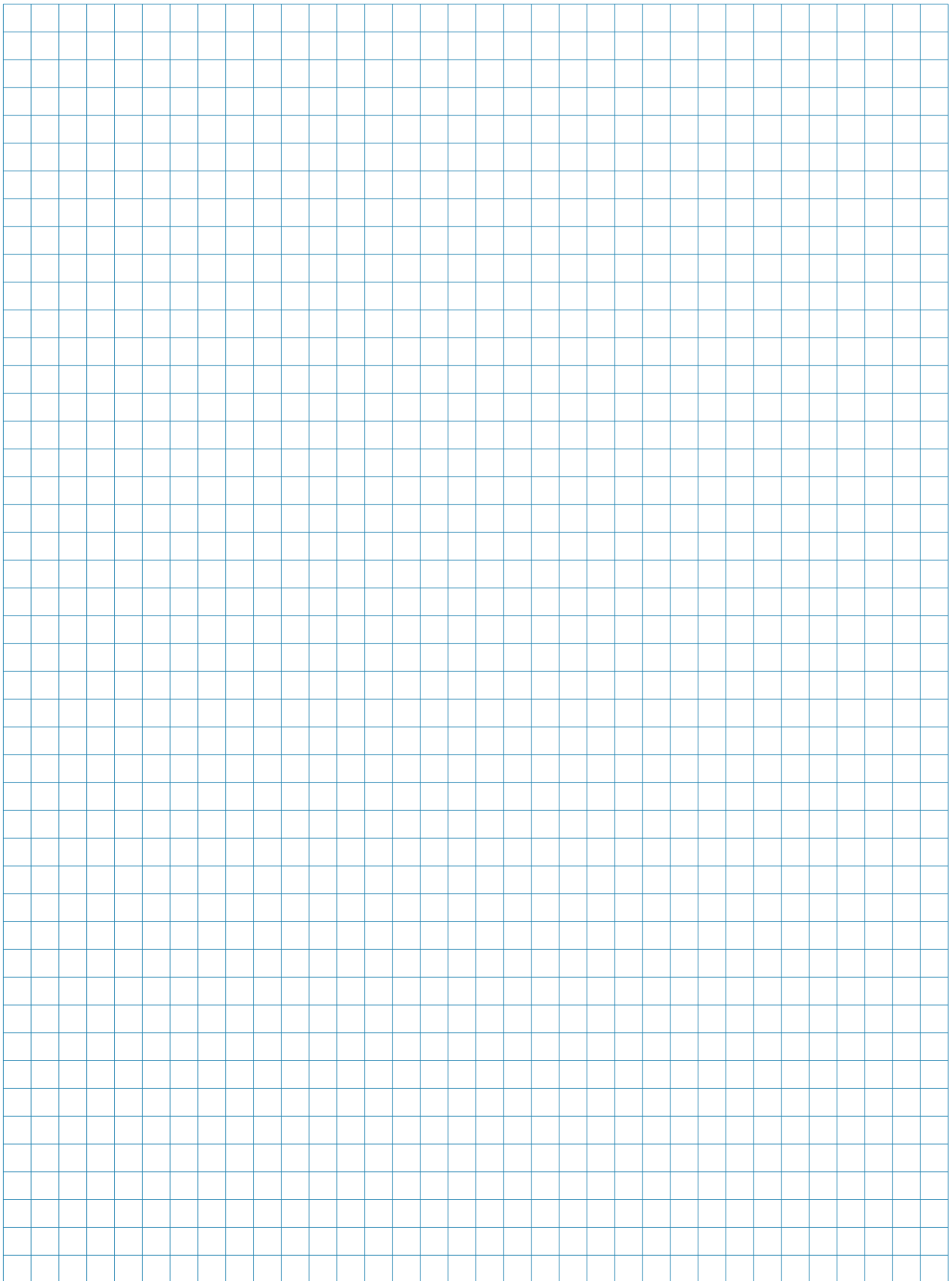
	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	<i>a</i> ²	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>ab</i>	<i>b</i> ²

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

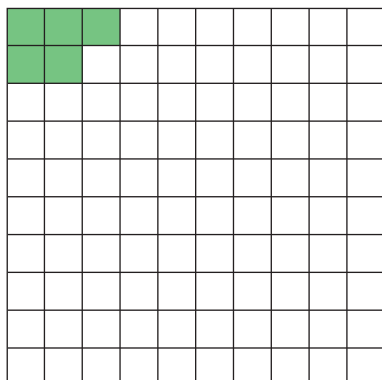
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Til egne notater

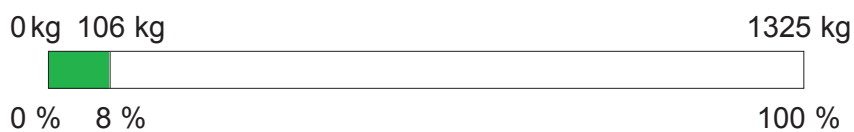


Procent

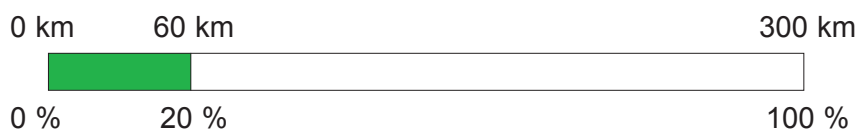
$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$



5 ud af 100



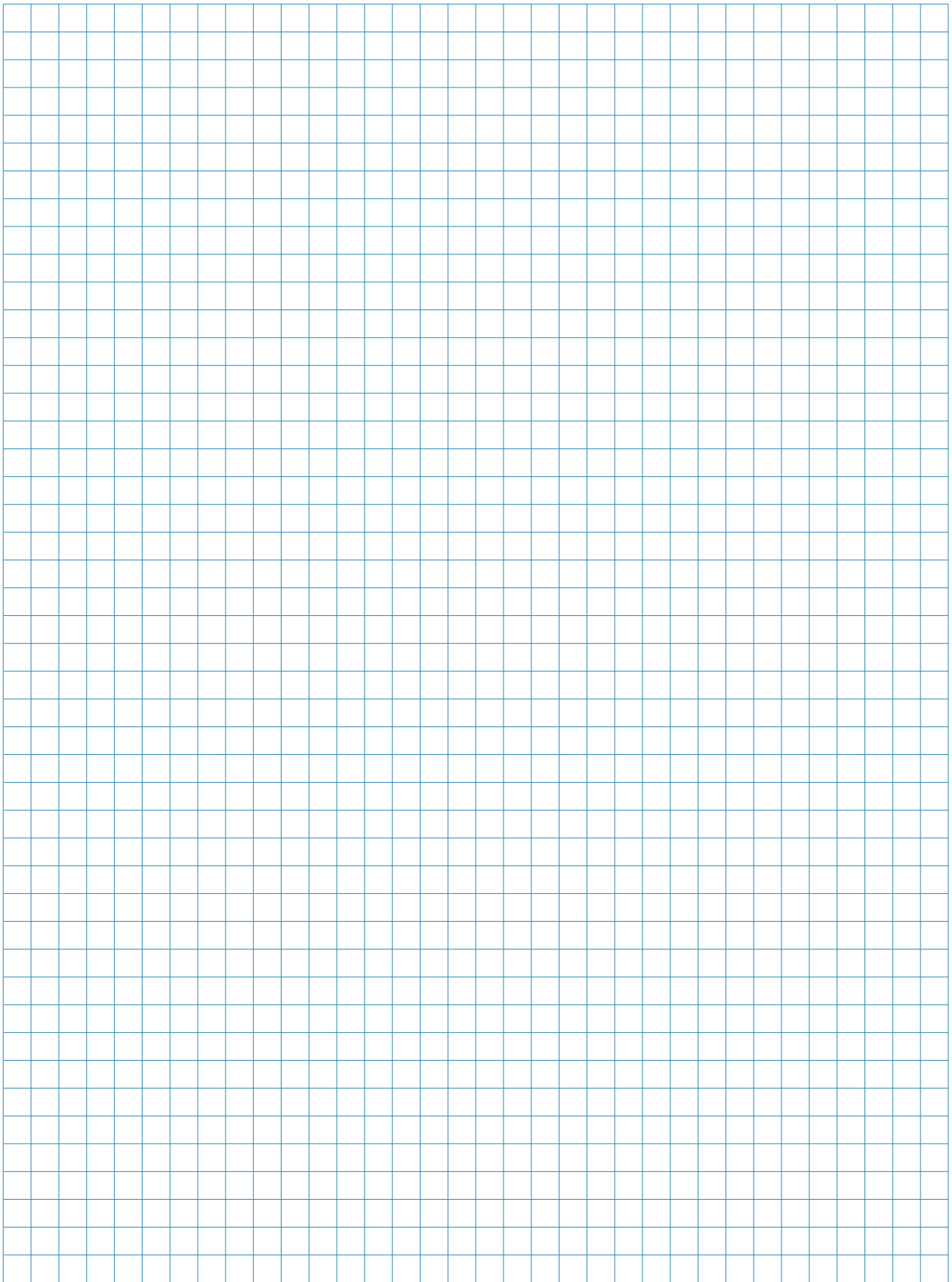
8 % af 1325 kg er $0,08 \cdot 1325 \text{ kg} = 106 \text{ kg}$

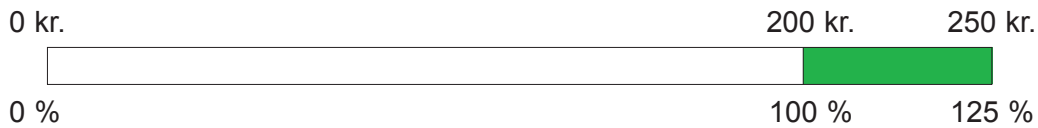


Hvor mange procent er 60 km af 300 km?

$$60 \text{ km} : 300 \text{ km} = 0,20 = \frac{20}{100} = 20\%$$

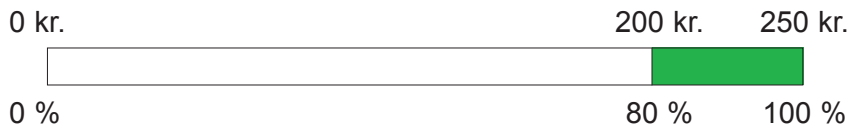
Til egne notater





Hvor mange procent er 250 kr. større end 200 kr.?

$$(250 \text{ kr.} - 200 \text{ kr.}) : 200 \text{ kr.} = 0,25 = 25 \%$$



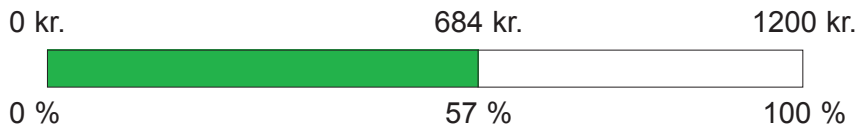
Hvor mange procent er 200 kr. mindre end 250 kr.?

$$(250 \text{ kr.} - 200 \text{ kr.}) : 250 \text{ kr.} = 0,20 = 20 \%$$



125 % af et beløb er 800 kr.

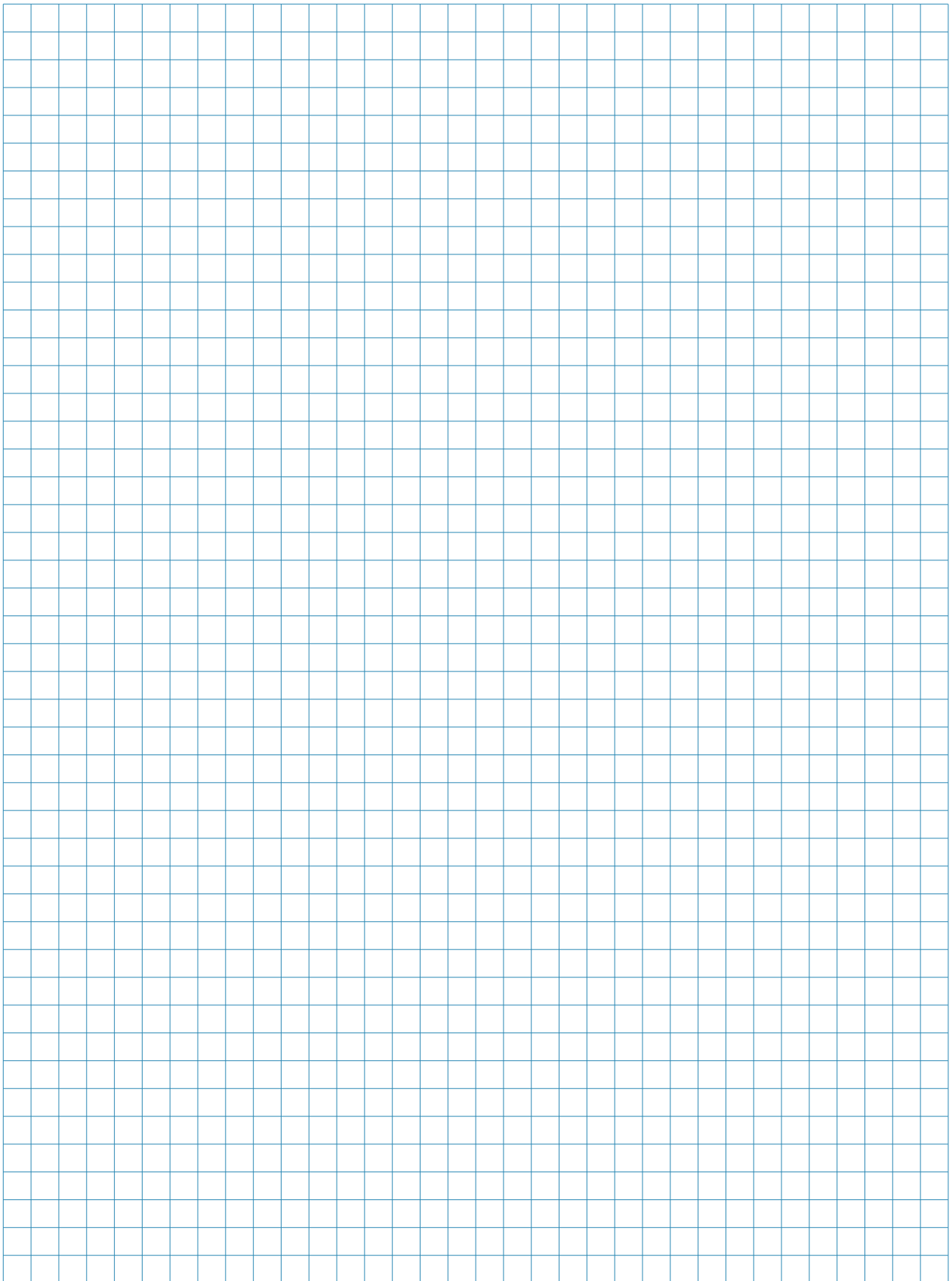
$$\text{Beløbet er } 800 \text{ kr.} : 1,25 = 640 \text{ kr.}$$



57 % af et beløb er 684 kr.

$$\text{Beløbet er } 684 \text{ kr.} : 0,57 = 1200 \text{ kr.}$$

Til egne notater



Økonomi

Rente

Rentebeløbet R af K kroner til p % p.a. i d dage er

$$R = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot D}$$

f.eks. 1. jan til 14. feb.
er 30+14 = 44 dage
(30 dage pr. måned)

R : rentebeløb i kroner

K : kapital

p : procent p.a. (pr. år)

d : antal rentedage

D : antal dage i et rentear

360 dage (30 pr. måned)

Sammensat rente

$$K_n = K \cdot (1+r)^n$$

K : startkapital

r : renten i procent angivet som decimaltal

n : antal terminer

K_n : kapitalens størrelse efter n terminer

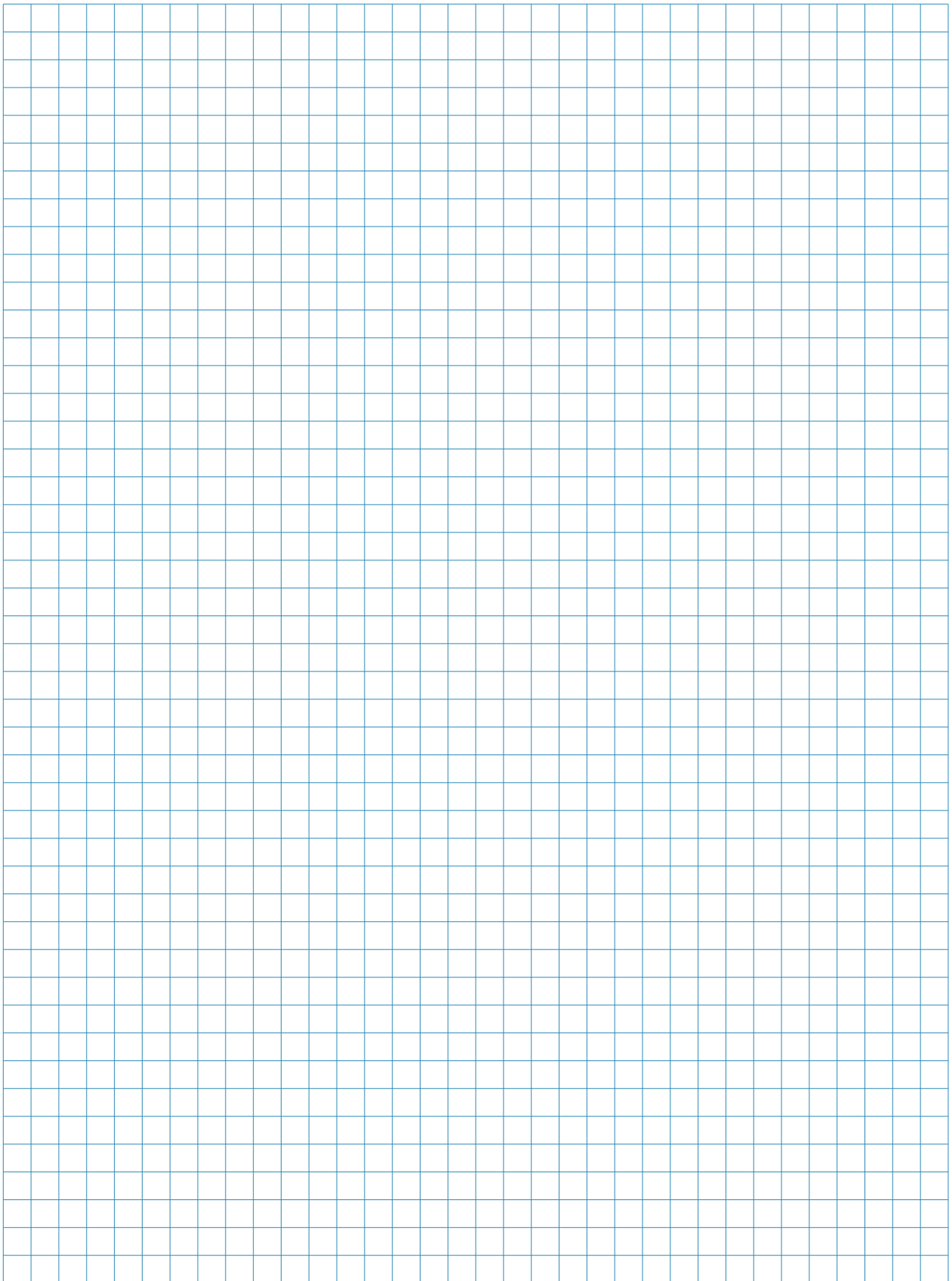
Trinvis fremskrivning:

Ny kapital = forrige kapital + rente af forrige kapital i en termin.

$$K_{n+1} = K_n + K_n \cdot r = K_n \cdot (1 + r)$$

	A	B	C	D
1	Sammensat rente			
2				
3	Startkapital:	1500,00		
4	Rente pr. termin:	5%		
5				
6		Antal terminer:	Kapital:	
7	K	0	1500,00	
8	K_1	1	1575,00	
9	K_2	2	1653,75	
10	K_3	3	1736,44	
11	K_4	4	1823,26	
12	K_5	5	1914,42	

Til egne notater



Valuta

Valutakurs: Prisen i danske kroner for 100 enheder af den udenlandske valuta.

Eksempler:

Beregn prisen i danske kroner

350 € til kurs 744 koster

$$\frac{350 \cdot 744}{100} = 350 \cdot 7,44 = 2604,00 \text{ kr.}$$

Beregn beløbet i udenlandsk valuta

Hvis kursen på engelske pund (£) er 1074, vil 500 DKK svare til

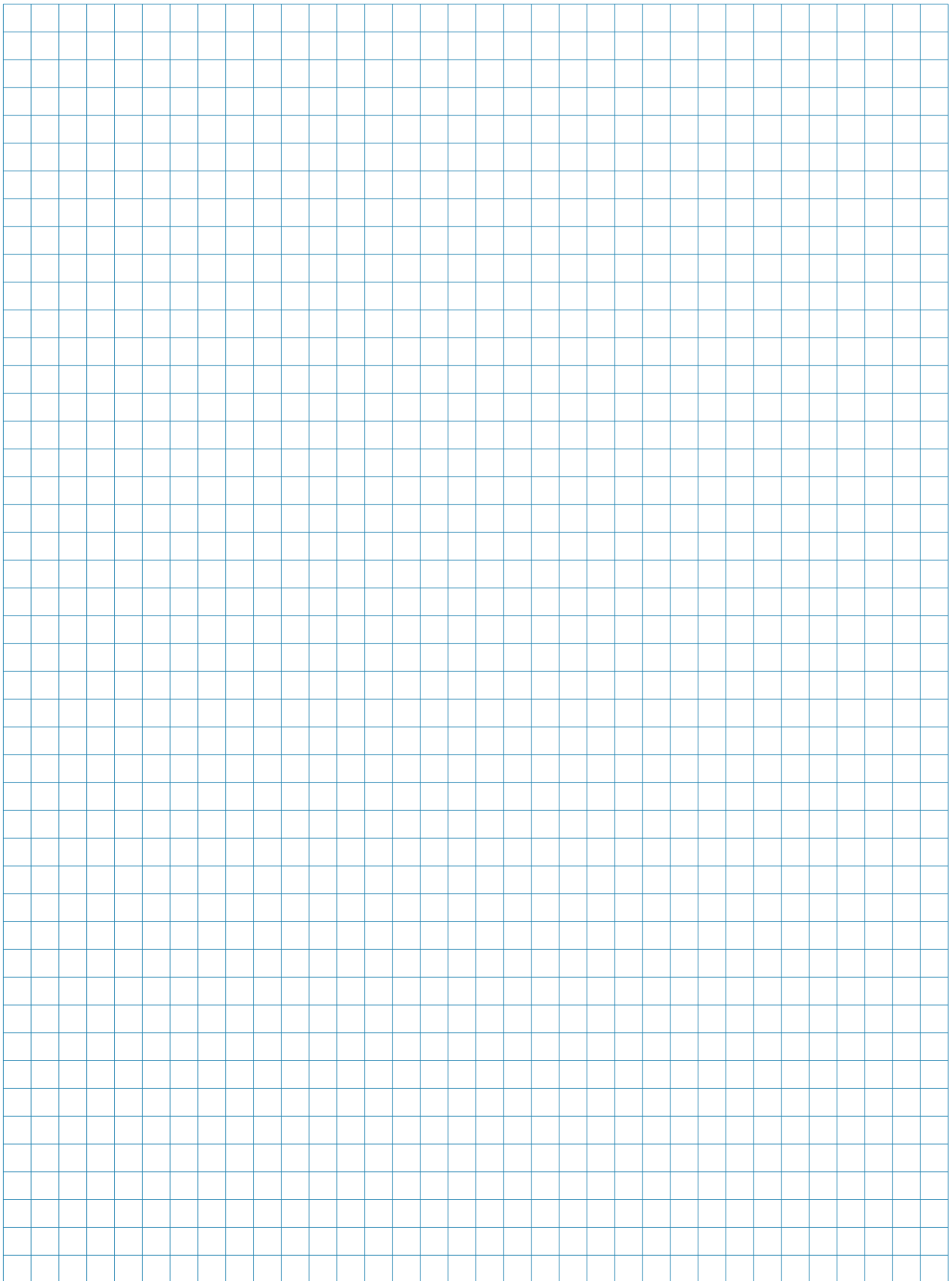
$$\frac{500}{10,74} \text{ £} = 46,55 \text{ £}$$

Beregn kursen

120 \$ svarer til 660 danske kroner.

$$\text{Kursen er } \frac{660 \cdot 100}{120} = 550.$$

Til egne notater

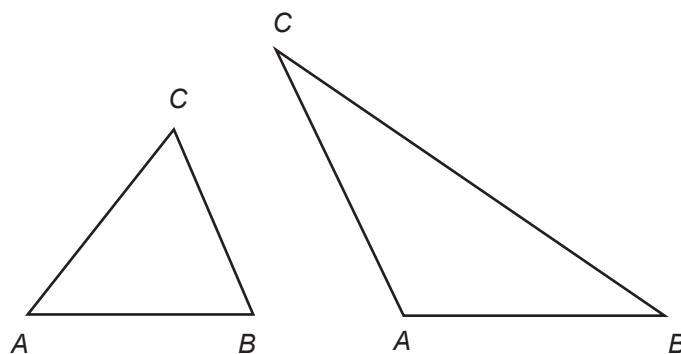


Geometri

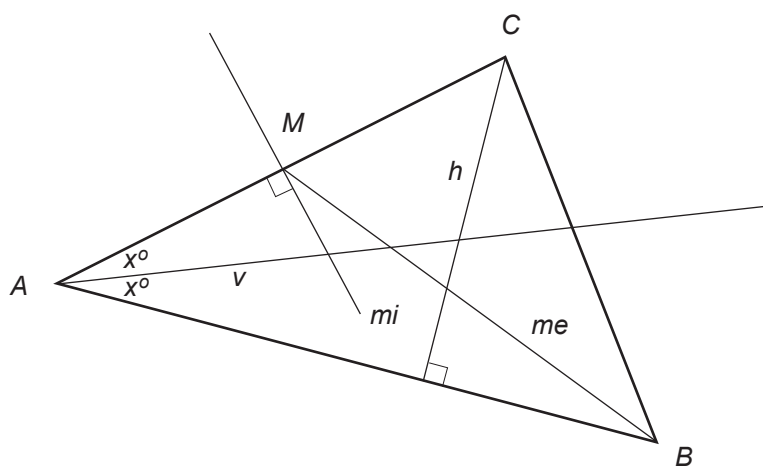
Trekanter

Vinkelsummen i en trekant er 180° .

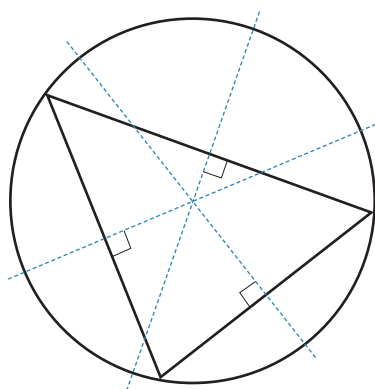
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Linjer ved trekanten

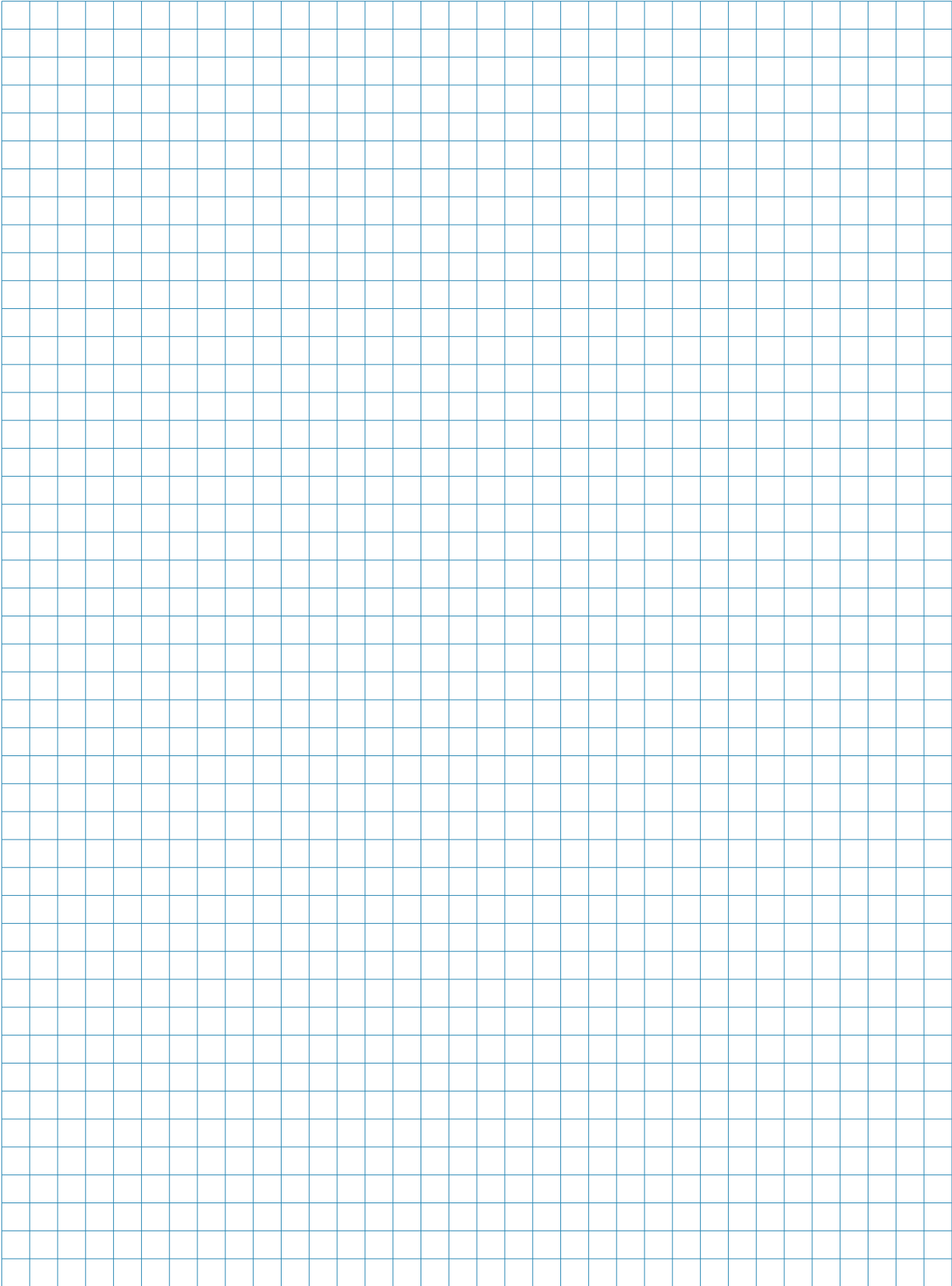


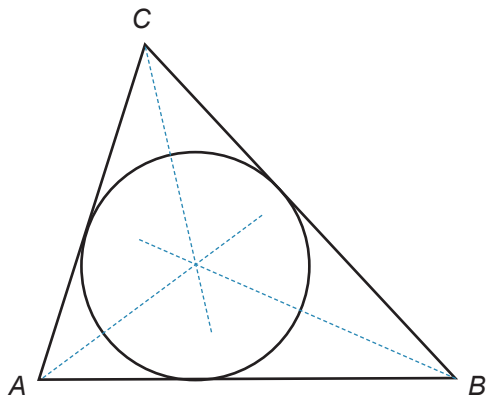
- M*: midpunktet af siden AC
- h*: højde
- v*: vinkelhalveringslinje
- mi*: midtnormal
- me*: median



Midnormalernes skæringspunkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.

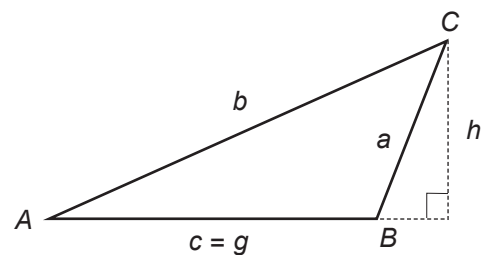
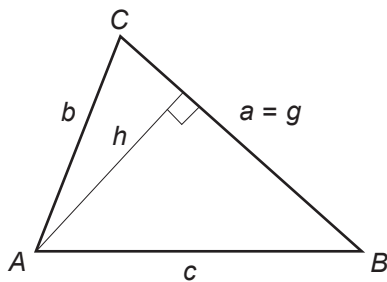
Til egne notater





Vinkelhalveringslinjernes
skæringspunkt er centrum for
trekantens indskrevne cirkel.

Areal af en trekant



h : højde

g : grundlinje

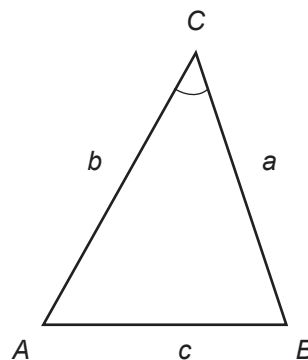
A : areal

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

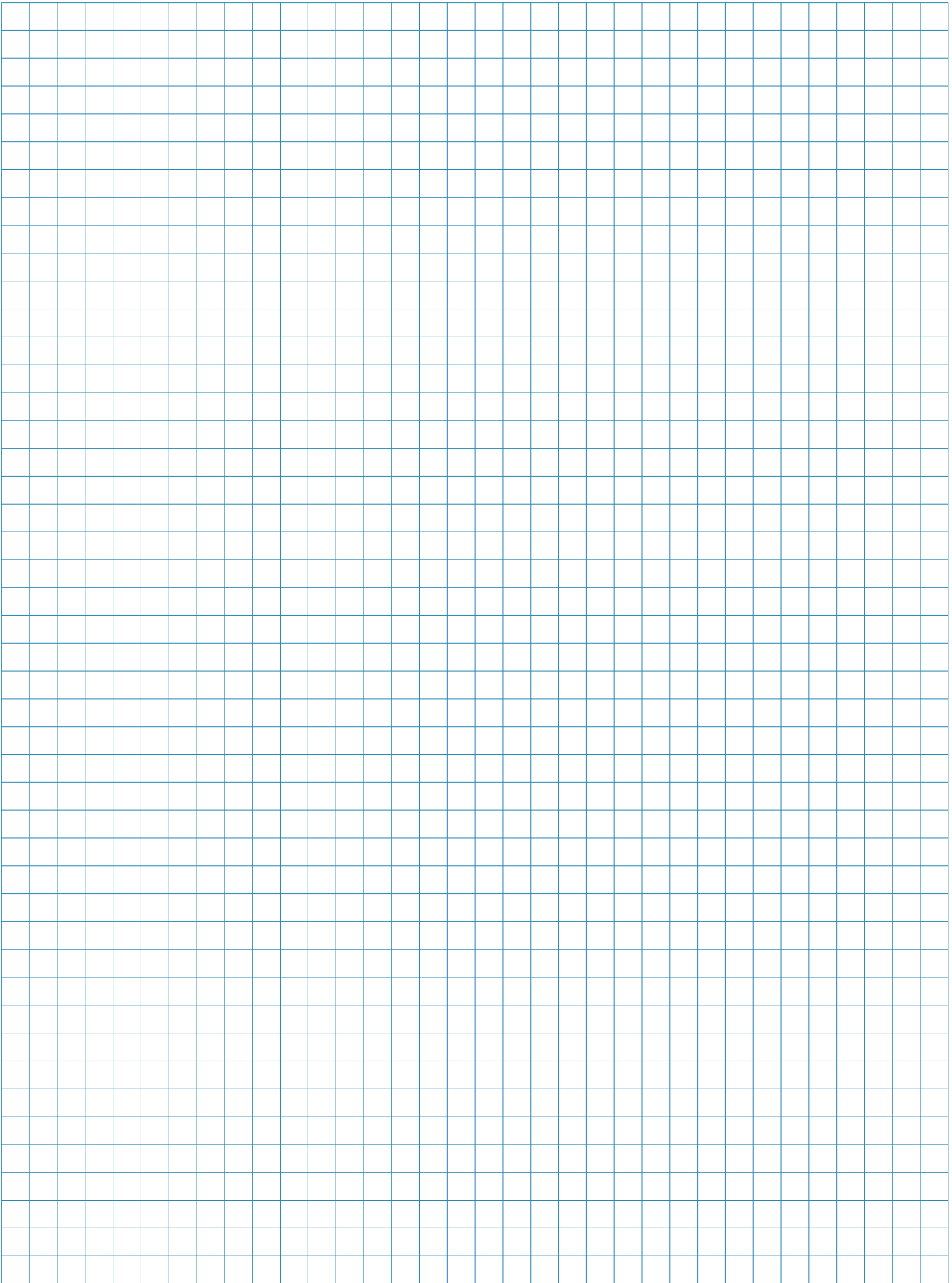
s er den halve omkreds: $s = \frac{a + b + c}{2}$

Herons formel: $A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

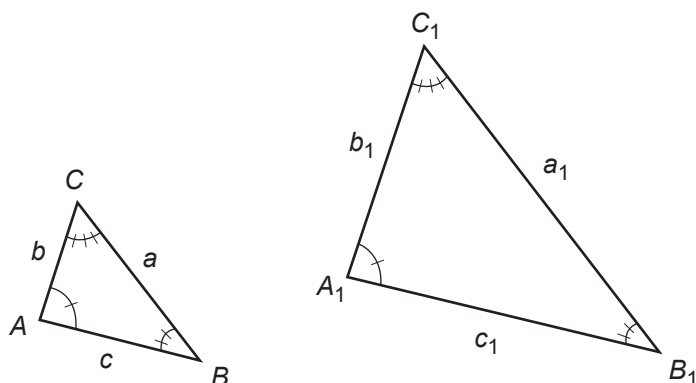
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$



Til egne notater



Ensvinklede trekanter

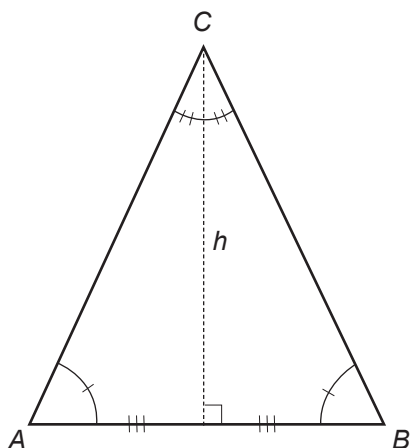


Ensvinklede trekanter er lignedannede.

Når $\triangle ABC$ er ensvinklet med $\triangle A_1B_1C_1$ gælder

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

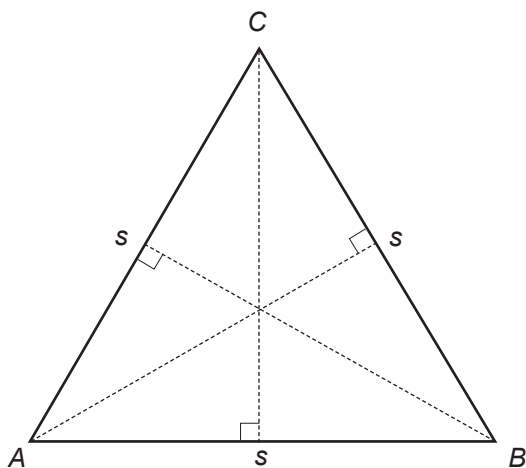
Ligebenet trekant



I en ligebenet trekant er grundvinklerne lige store:
 $\angle A = \angle B$.

I en ligebenet trekant er højden fra toppunktet også vinkelhalveringslinje, median og midtnormal.

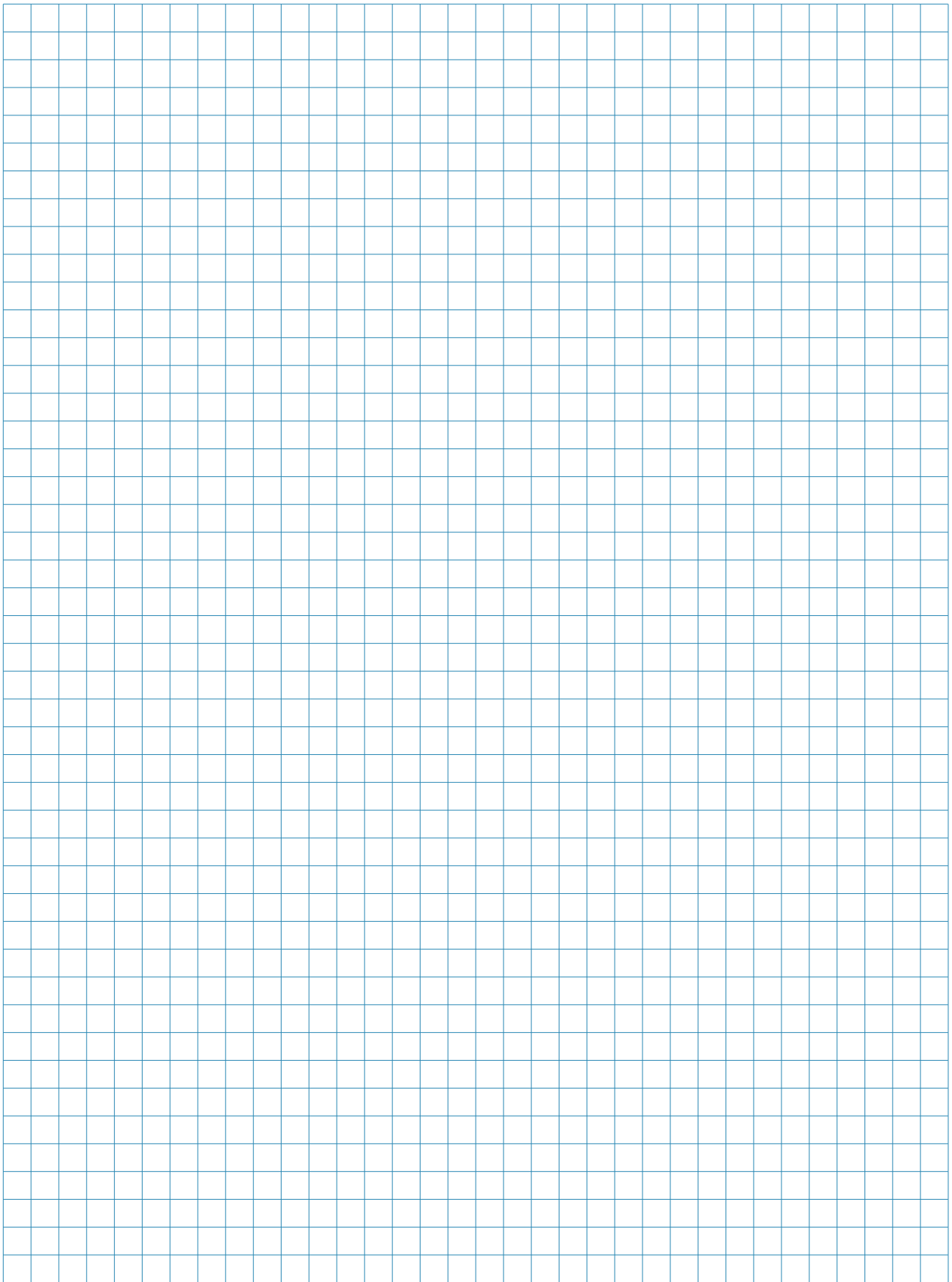
Ligesidet trekant



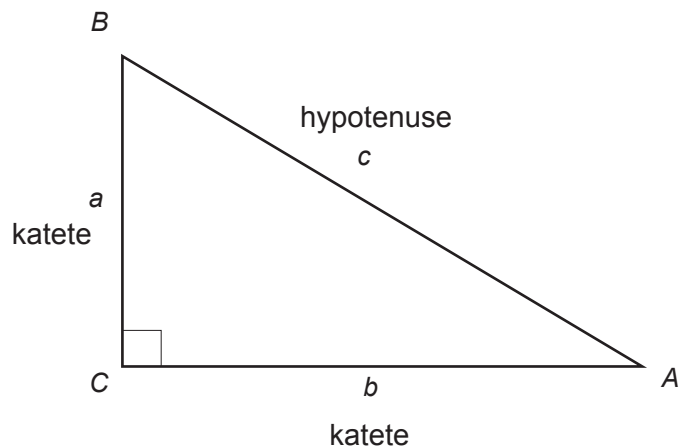
I en ligesidet trekant er alle vinkler 60° .

I en ligesidet trekant vil de tre højder også være vinkelhalveringslinjer, medianer og midtnormaler.

Til egne notater



Retvinklet trekant



Vinkler:

Summen af de to spidse vinkler er 90° .

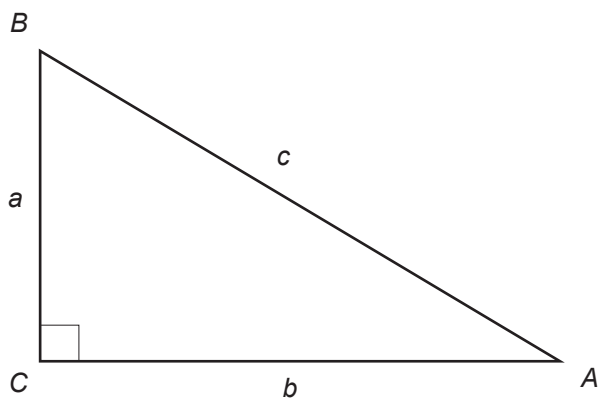
$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

Pythagoras sætning:

I en retvinklet trekant er summen af kateternes kvadrater lig med kvadratet på hypotenusen.

Hvis $\angle C = 90^\circ$, gælder:

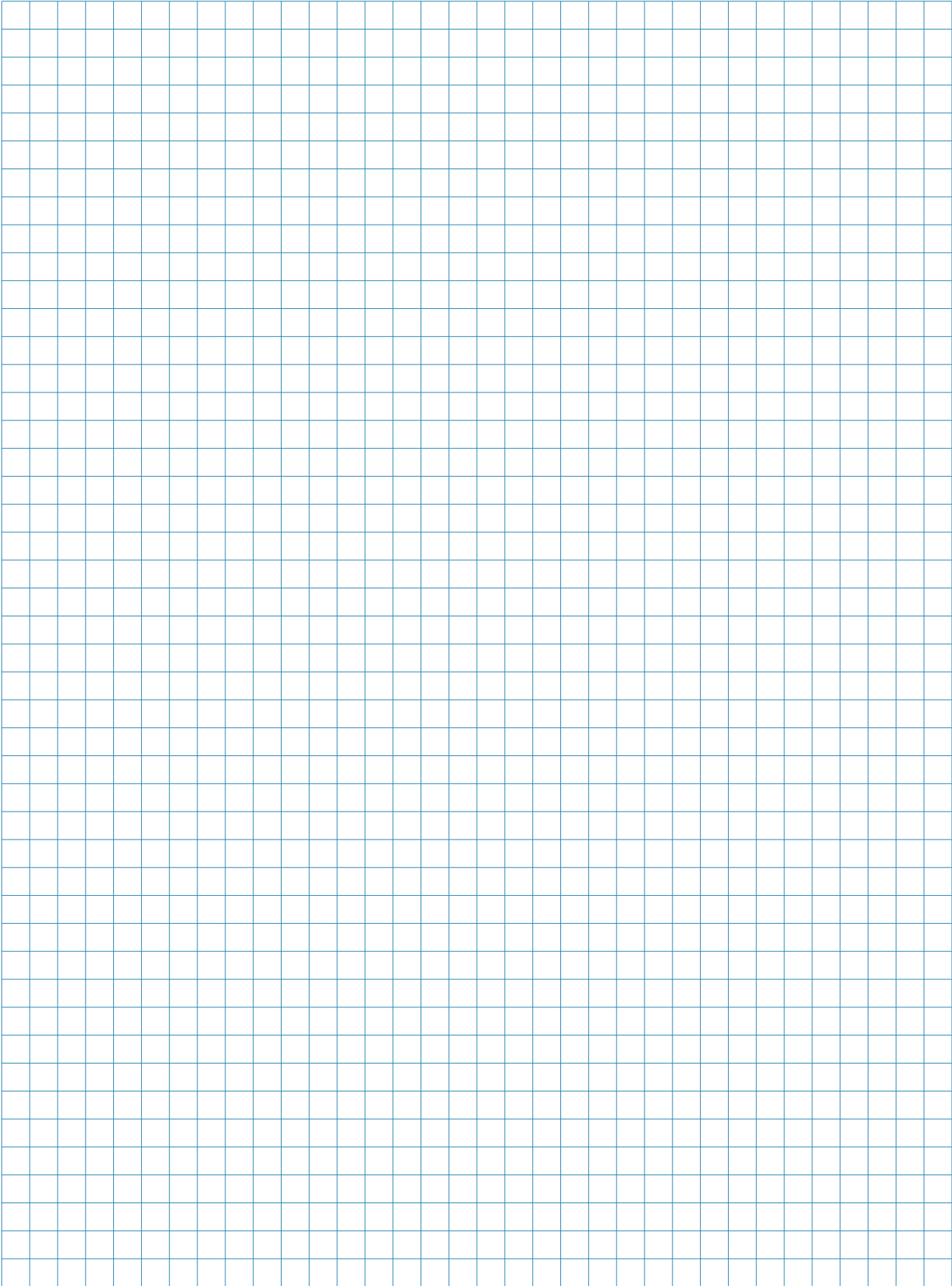
$$a^2 + b^2 = c^2$$



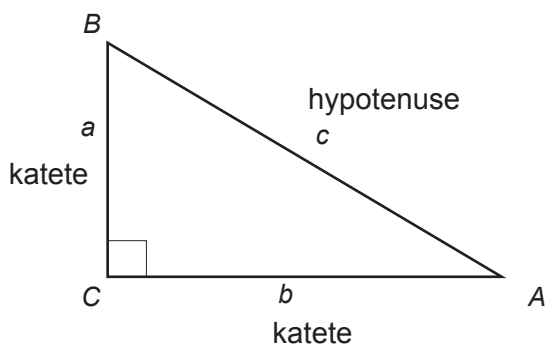
Omvendt Pythagoras:

Hvis $a^2 + b^2 = c^2$ i trekant ABC, så er trekanten retvinklet, og $\angle C$ er den rette vinkel.

Til egne notater

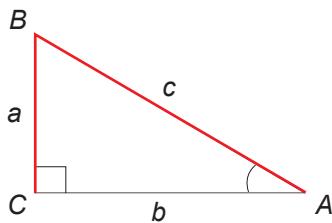


Trigonometri



Siden b er den hosliggende katete til $\angle A$.

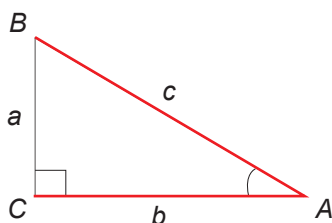
Siden a er den modstående katete til $\angle A$.



Om sinus til en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder:

$$\sin v = \frac{\text{den modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

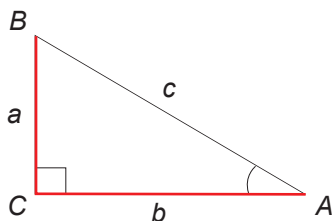
$$\sin A = \frac{a}{c}$$



Om cosinus til en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder:

$$\cos v = \frac{\text{den hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

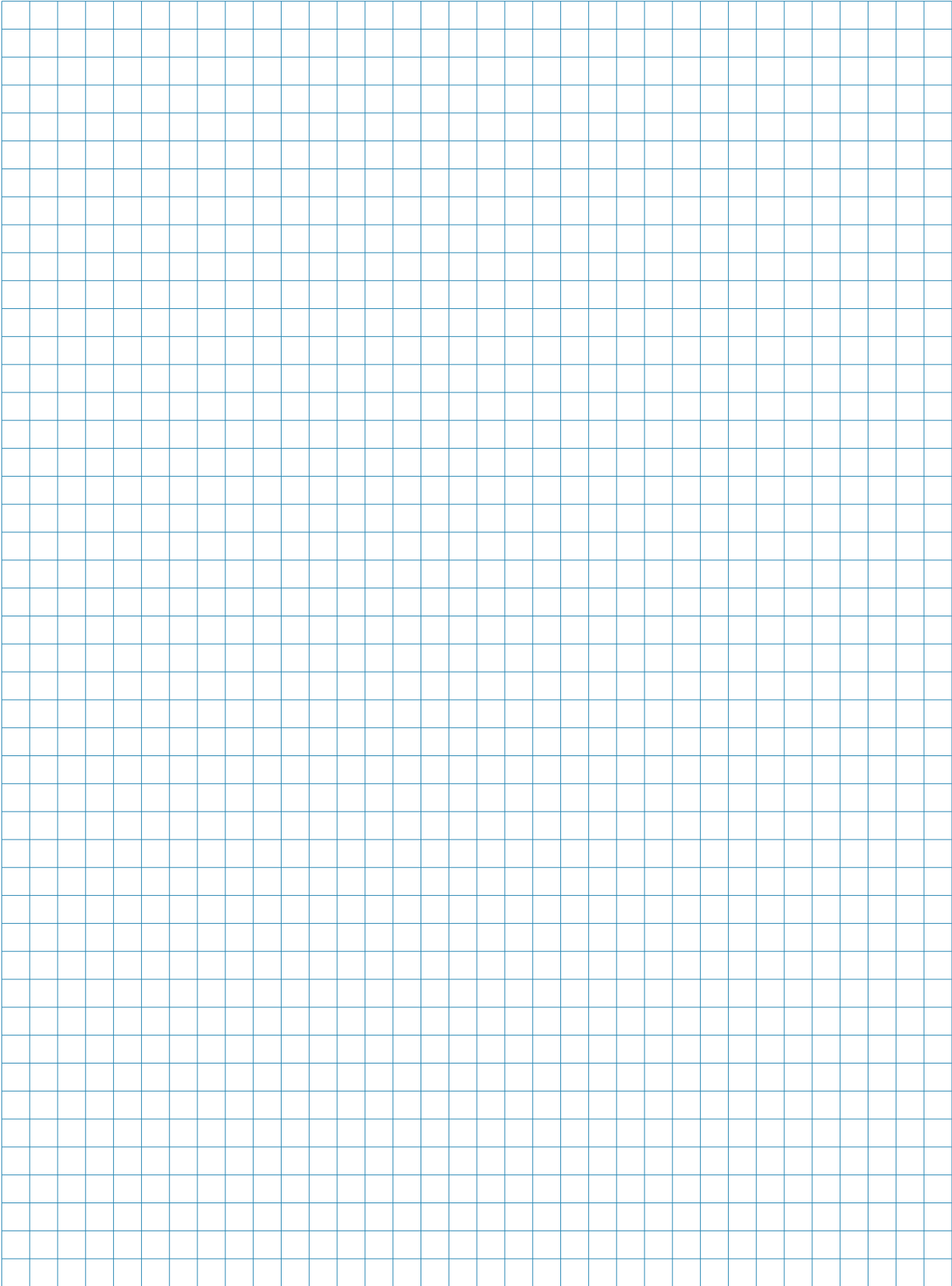


Om tangens til en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder:

$$\tan v = \frac{\text{den modstående katete}}{\text{den hosliggende katete}}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

Til egne notater



Firkanter

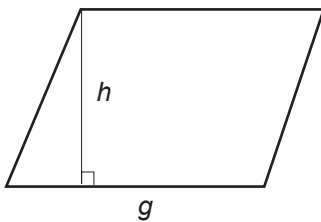
Rektangel



l : længde
 b : bredde
 A : areal

$$A = l \cdot b$$

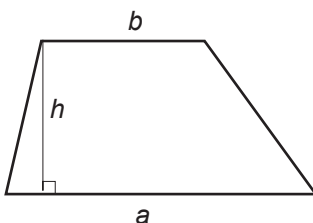
Parallelogram



h : højde
 g : grundlinje
 A : areal

$$A = h \cdot g$$

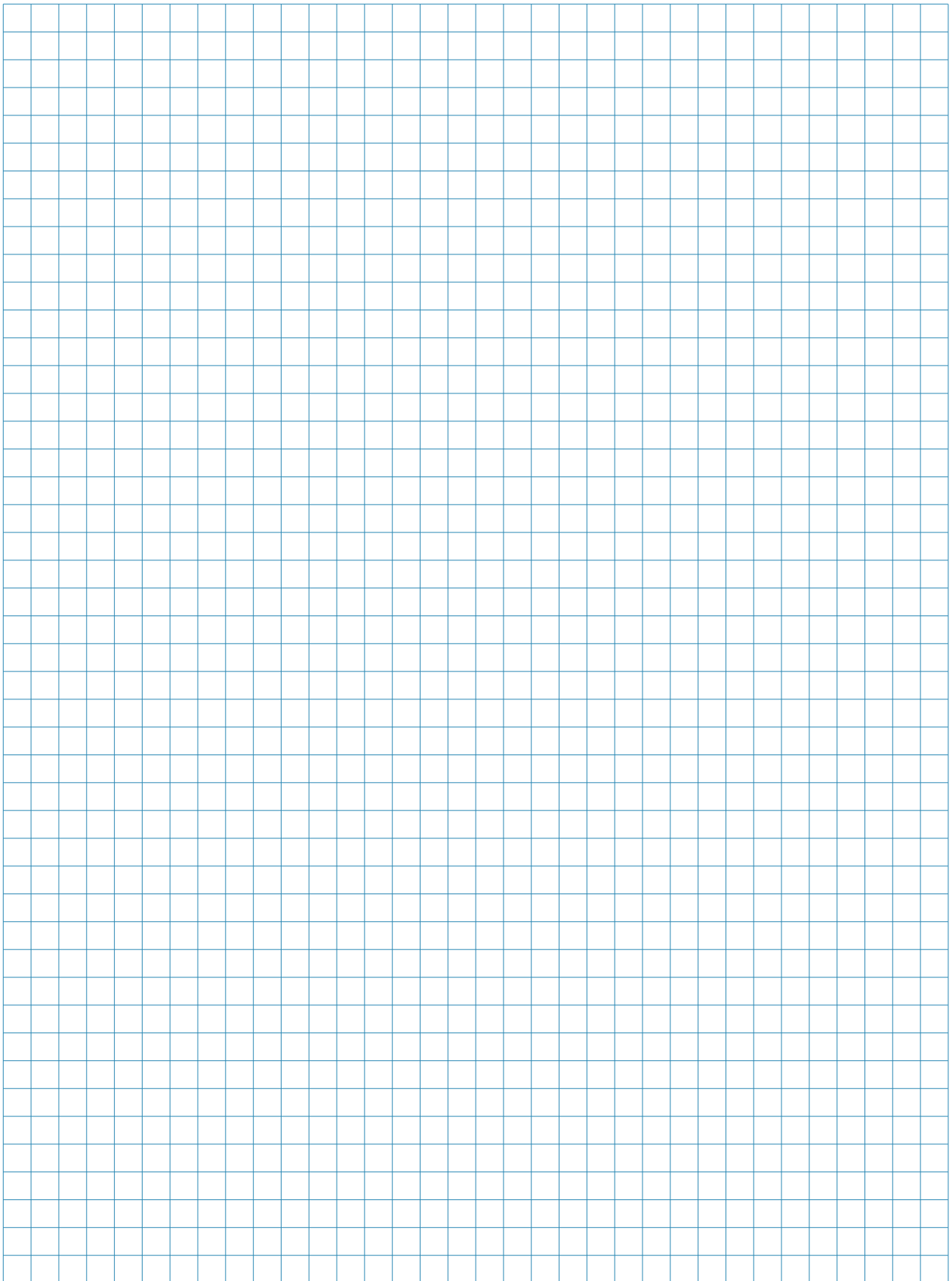
Trapez



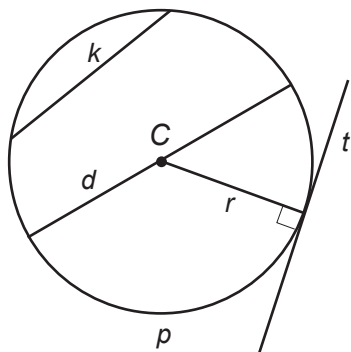
h : højde
 a og b : parallelle sider
 A : areal

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$

Til egne notater



Cirkler



C: centrum for cirklen

p : cirkelperiferien

d : cirkelns diameter

r : cirkelns radius ($r = \frac{1}{2} \cdot d$)

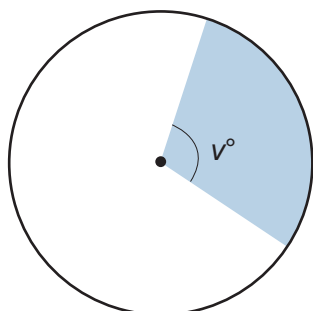
t : tangent til cirklen

k : korde til cirklen – den længste korde er d

Areal: $A = \pi \cdot r^2$

Omkreds: $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

$O = \pi \cdot d$

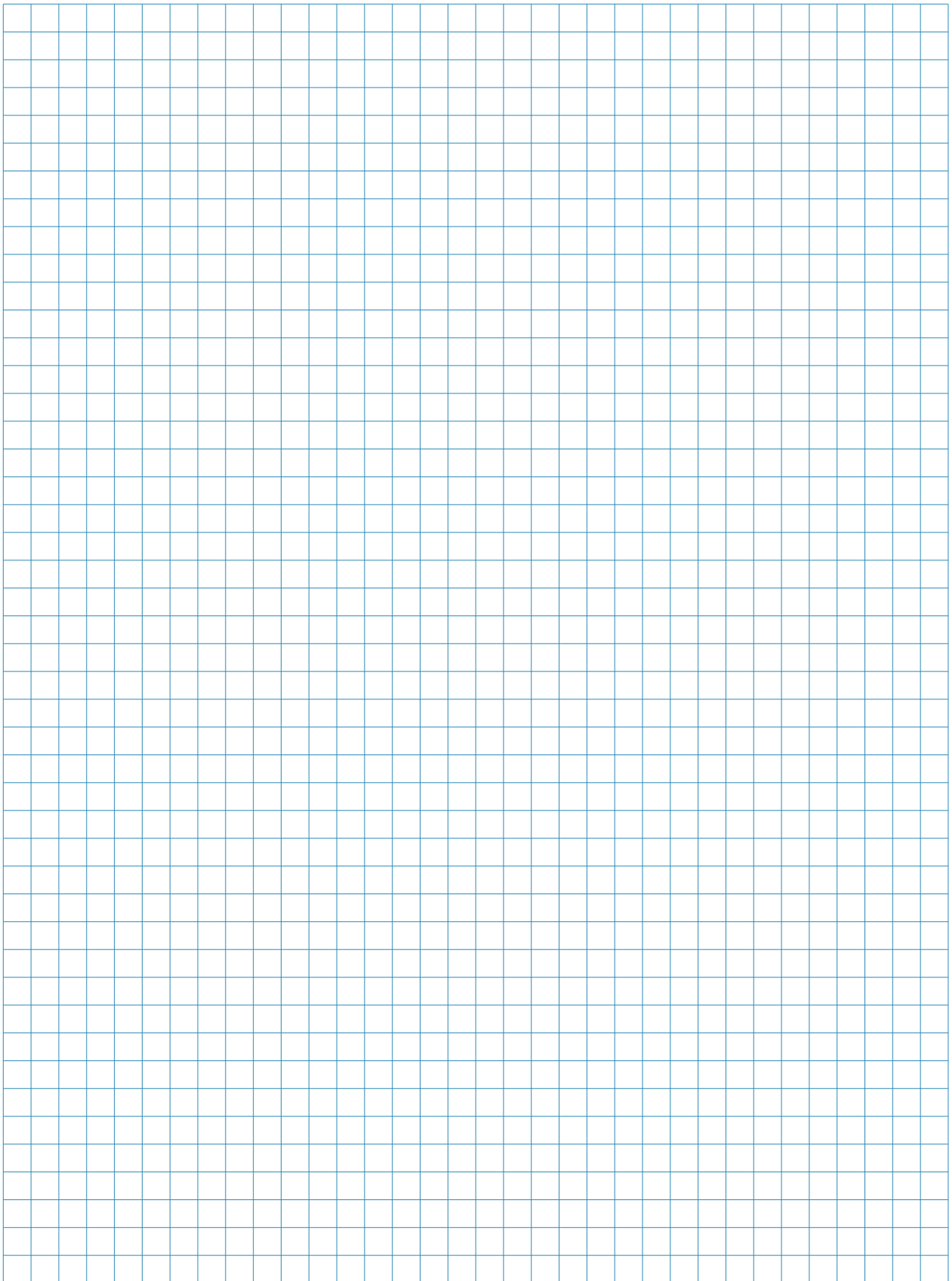


Cirkeludsnit

Areal af cirkeludsnit:

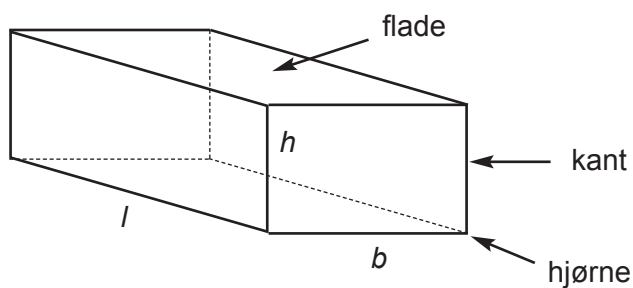
$$A = \frac{V^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$$

Til egne notater



Rumfang og overflade

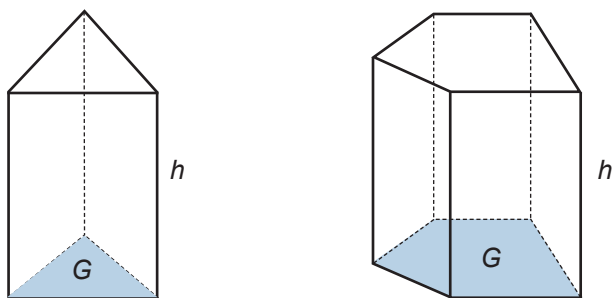
Kasse



h : højde
 l : længde
 b : bredde
 V : rumfang

$$V = l \cdot b \cdot h$$

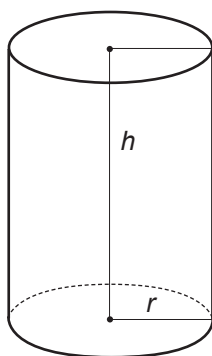
Prisme



h : højde
 G : areal af grundfladen
 V : rumfang

$$V = h \cdot G$$

Cylinder

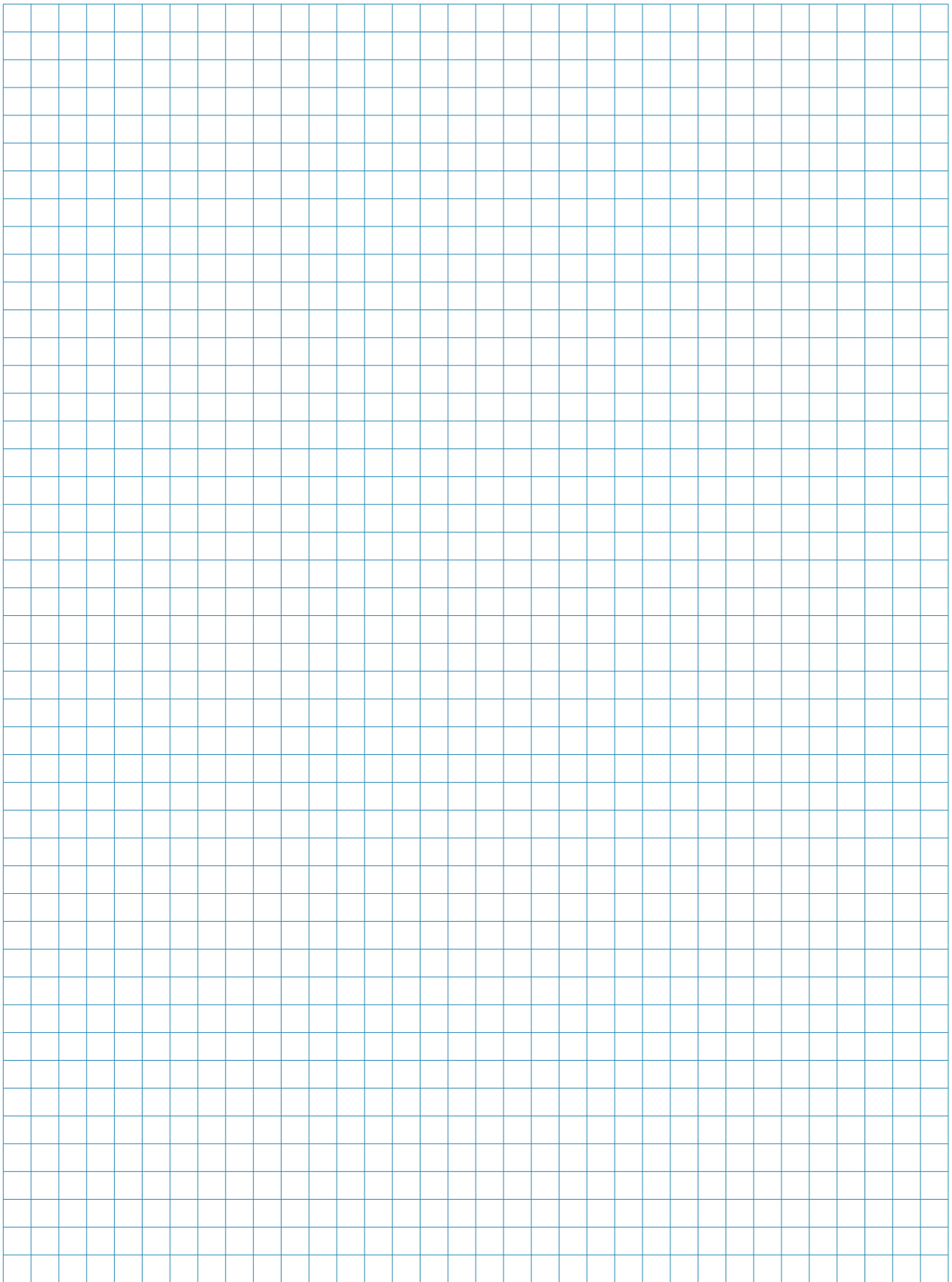


h : højde
 r : radius
 V : rumfang
 O : areal af den krumme overflade

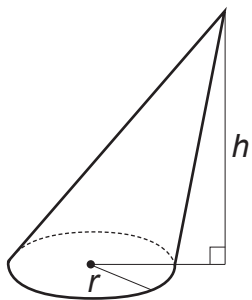
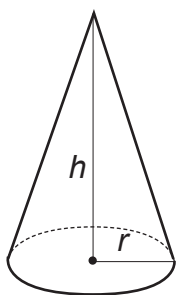
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Til egne notater



Kegle



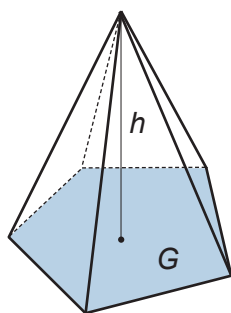
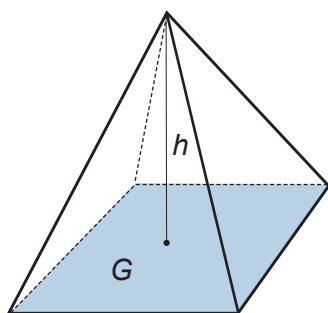
h : højde

G : areal af grundfladen

V : rumfang

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$$

Pyramide



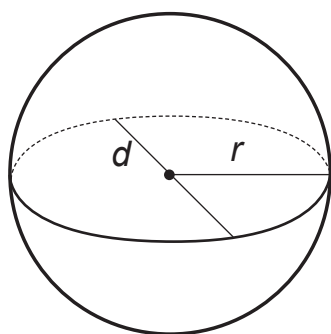
h : højde

G : areal af grundfladen

V : rumfang

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$$

Kugle



r : radius

d : diameter

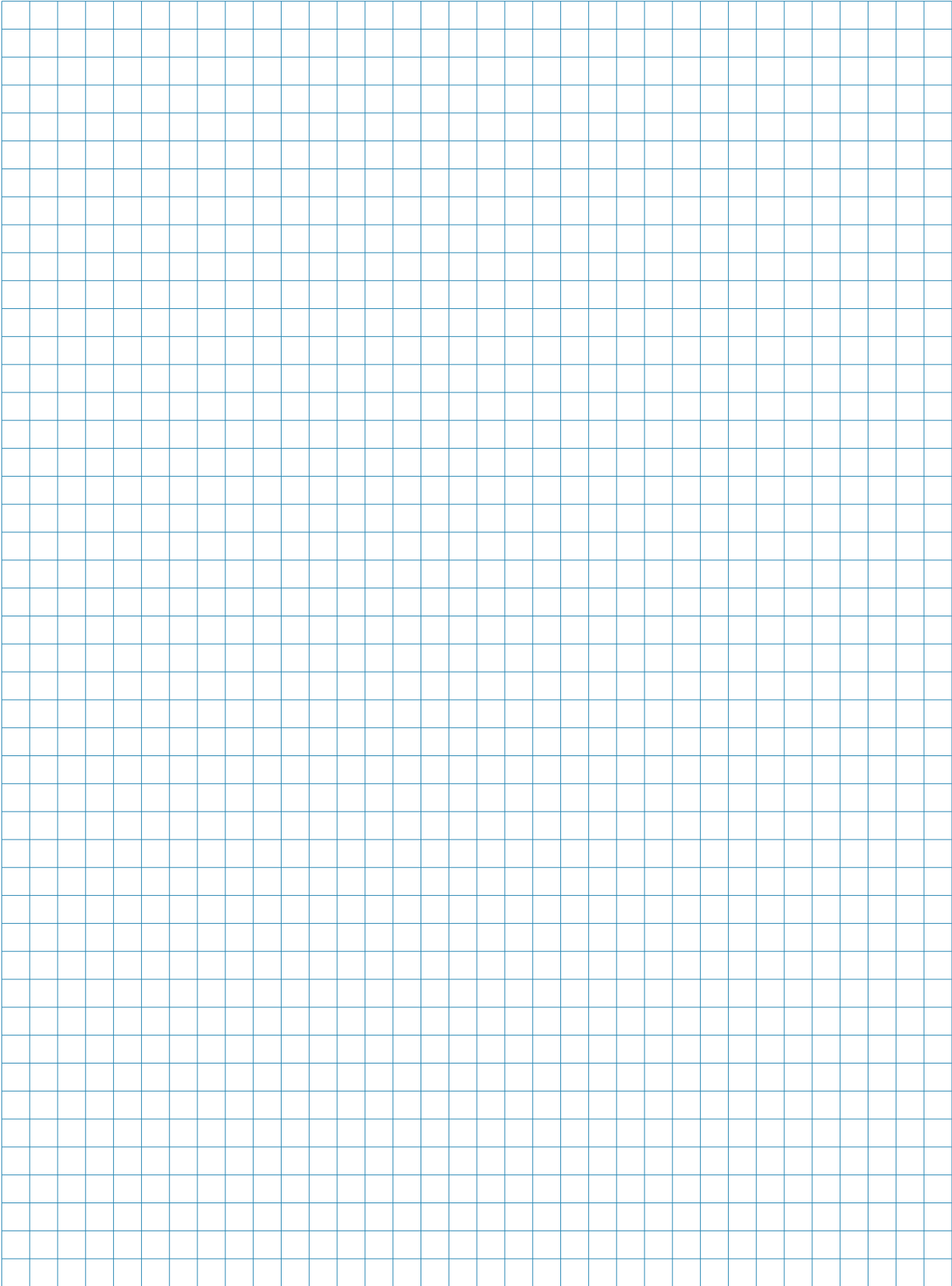
V : rumfang

O : areal af overflade

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Til egne notater

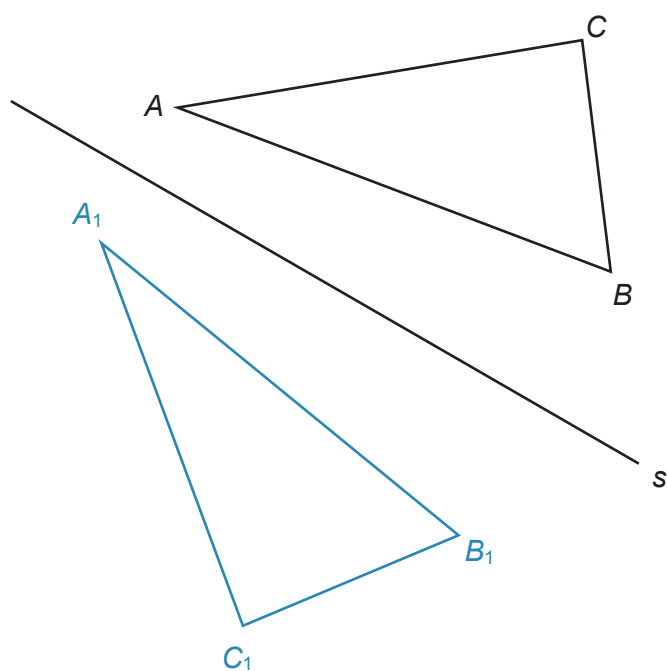


Geometri – flytninger

Drejning, spejling og parallelforskydning kaldes for flytninger.

Når en figur flyttes, vil den flyttede figur være kongruent med den oprindelige figur.

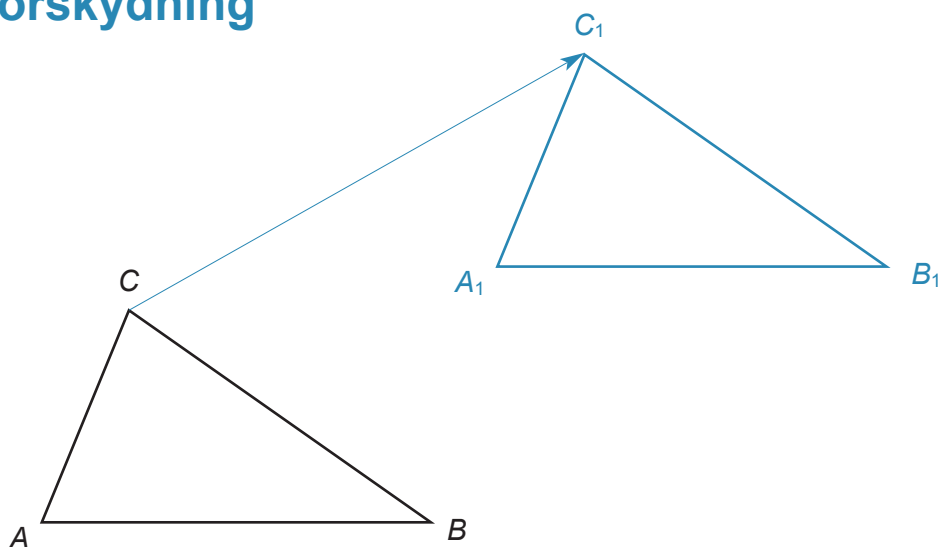
Spejling



s er spejlingsakse

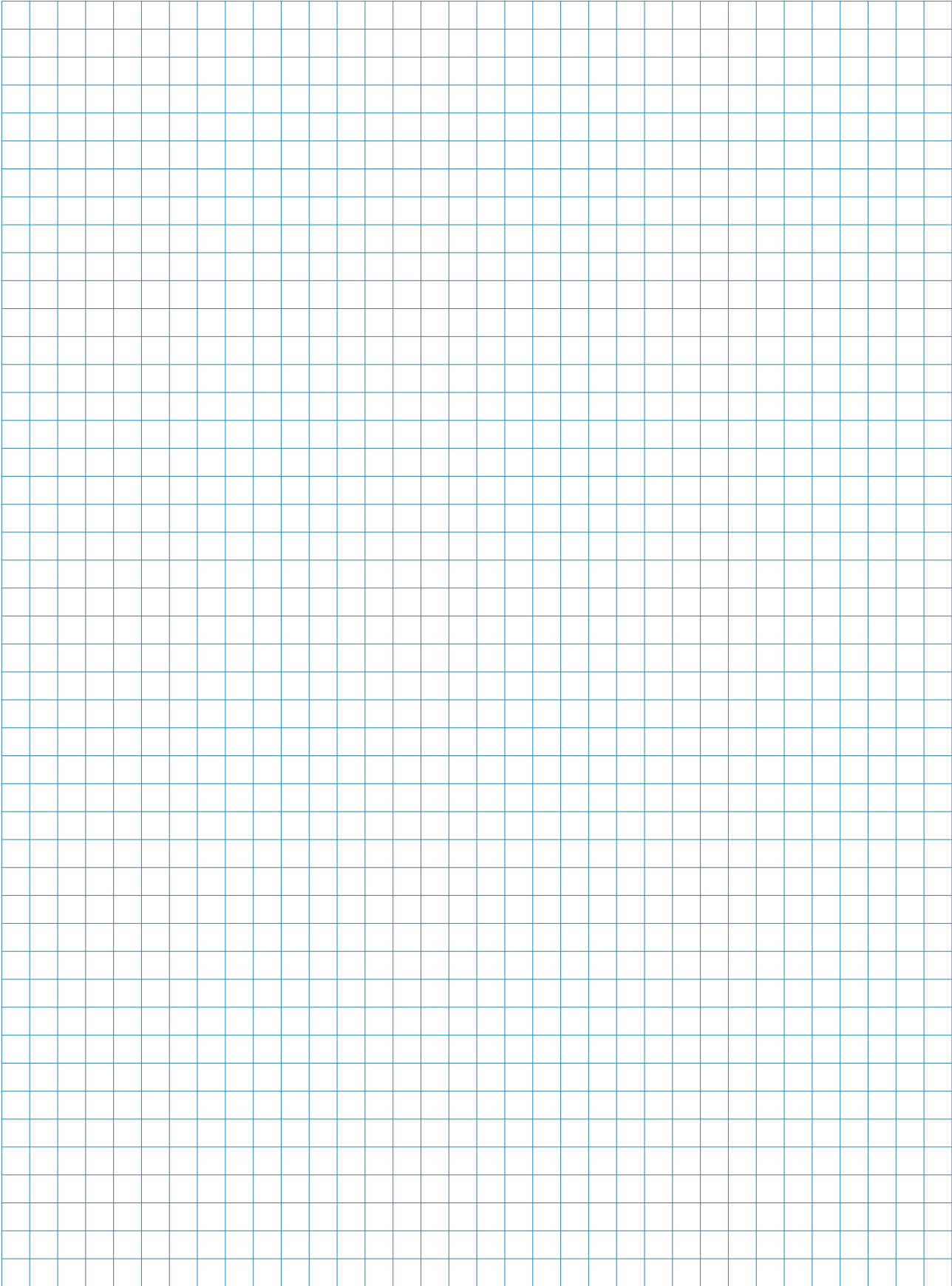
$\triangle ABC$ er spejlet i linjen s

Parallelforskydning

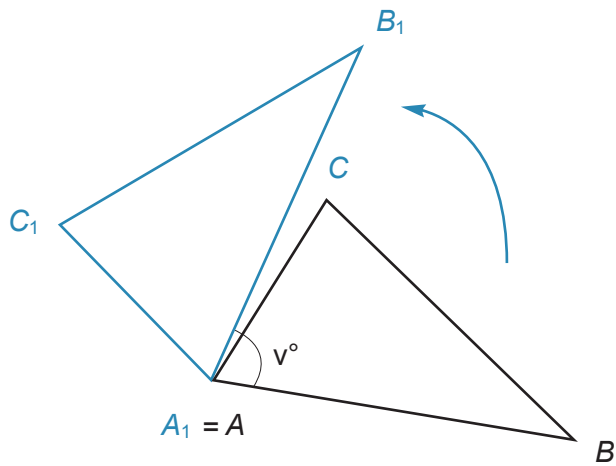


$\triangle ABC$ parallelforskydes i $\triangle A_1 B_1 C_1$

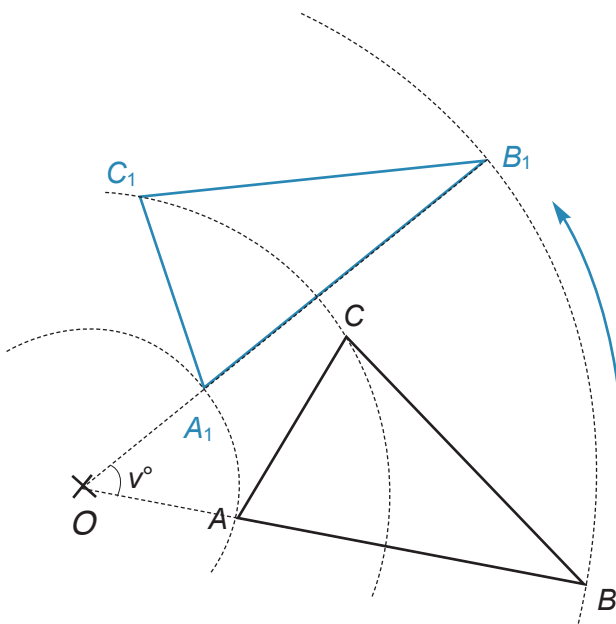
Til egne notater



Drejning

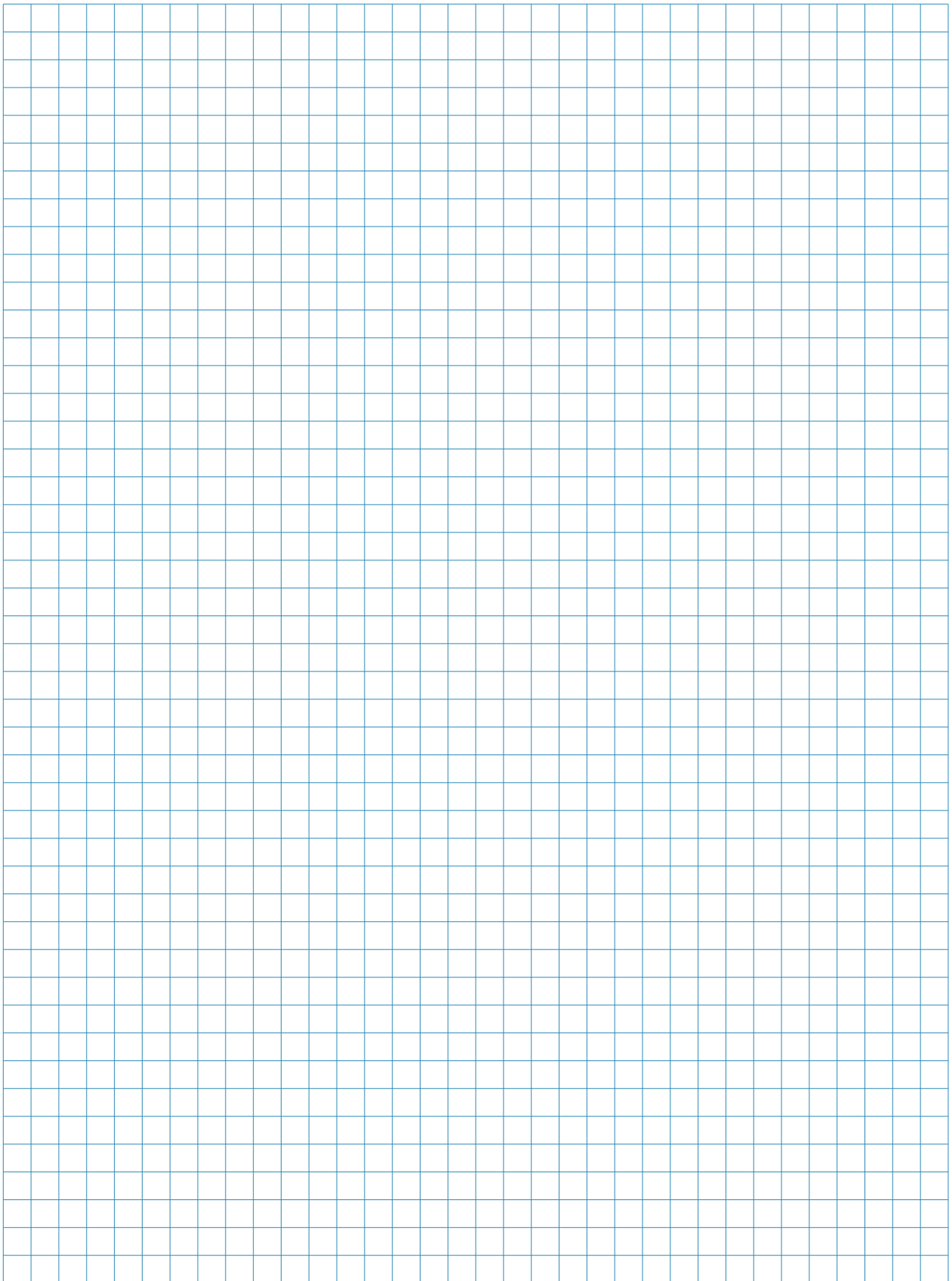


$\triangle ABC$ flyttes over i $\triangle A_1B_1C_1$ ved en drejning på v° mod uret om punktet A



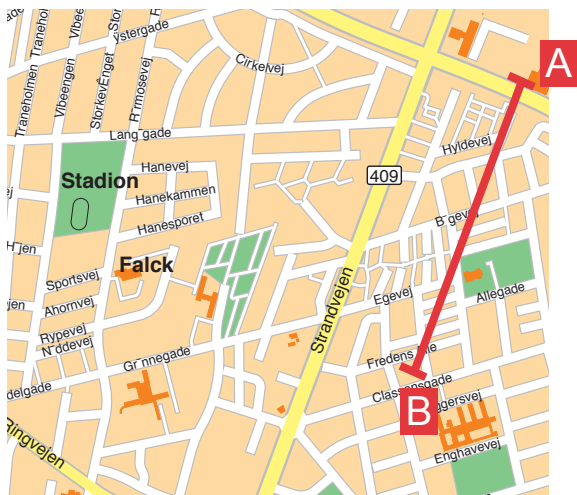
$\triangle ABC$ flyttes over i $\triangle A_1B_1C_1$ ved en drejning på v° mod uret om punktet O

Til egne notater



Geometri – Tegning

Målestoksforhold



Beregn afstanden i virkeligheden

Målestoksforhold:

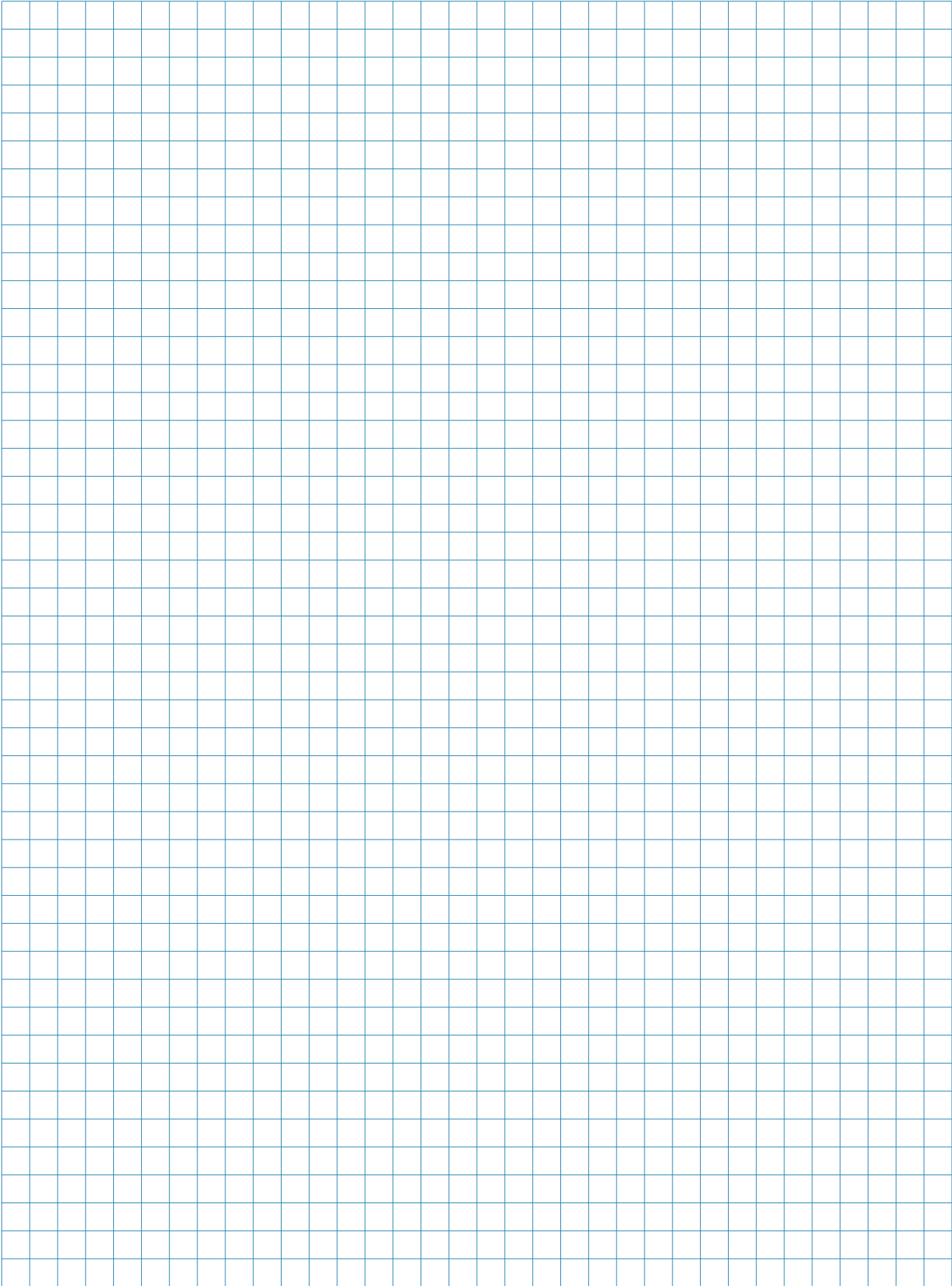
1 : 50 000

Afstanden mellem A og B er på kortet 4 cm.

Afstanden er i virkeligheden:

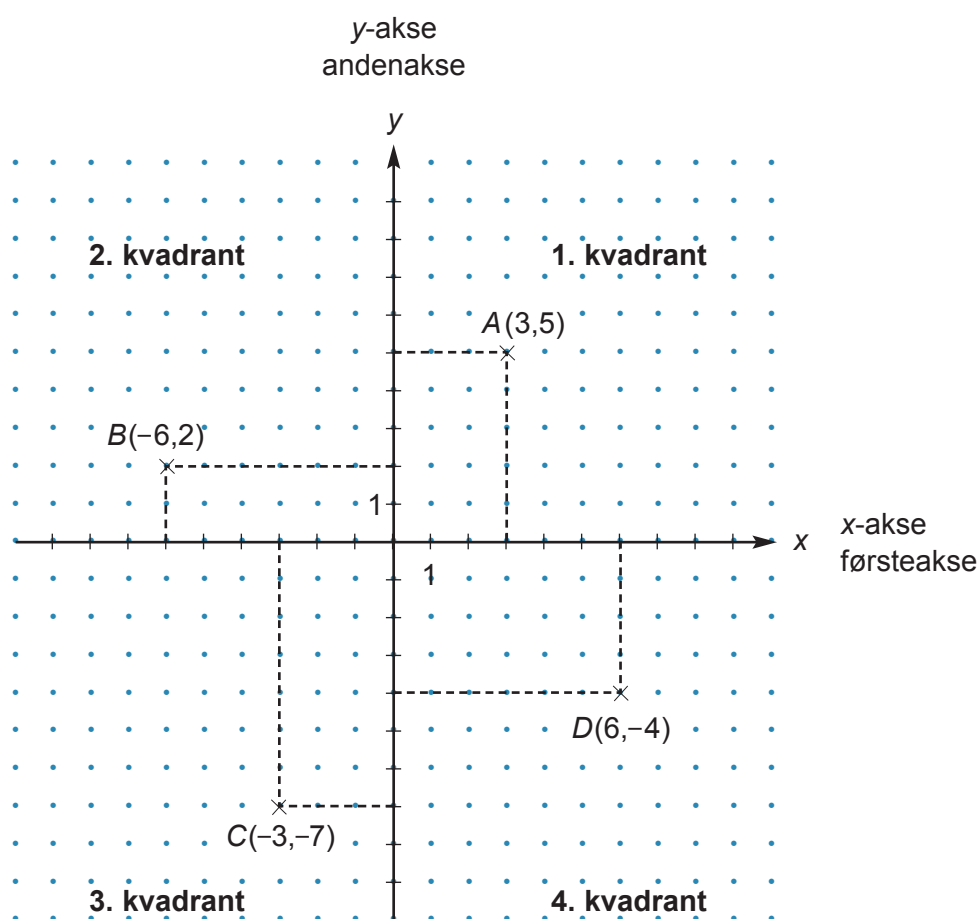
$$50\,000 \cdot 4 \text{ cm} = 200\,000 \text{ cm} = 2\,000 \text{ m} = 2 \text{ km}$$

Til egne notater

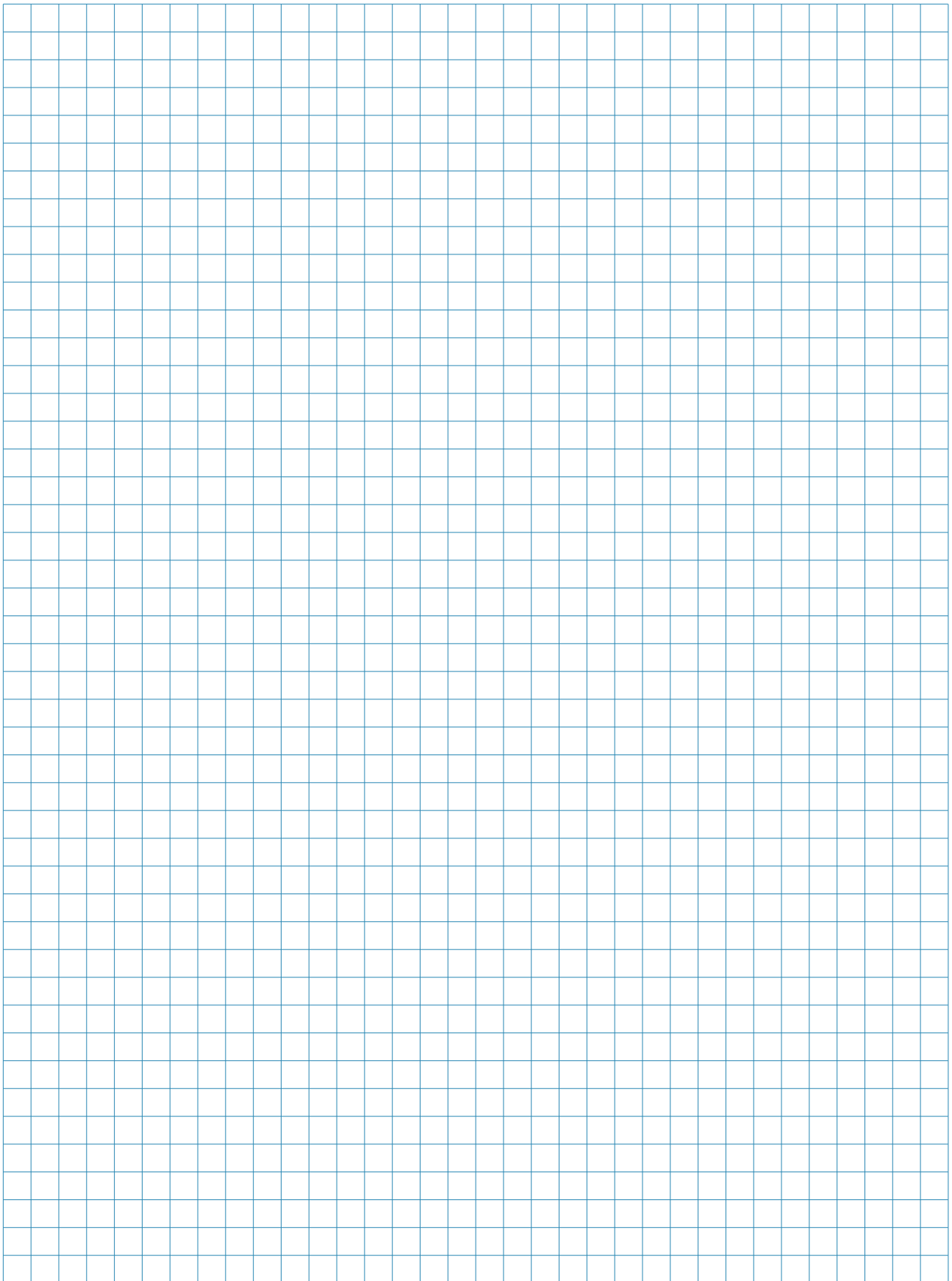


Geometri i et koordinatsystem

Koordinatsystemet



Til egne notater



Ligning for ret linje

Lodret linje:

$$x = k$$

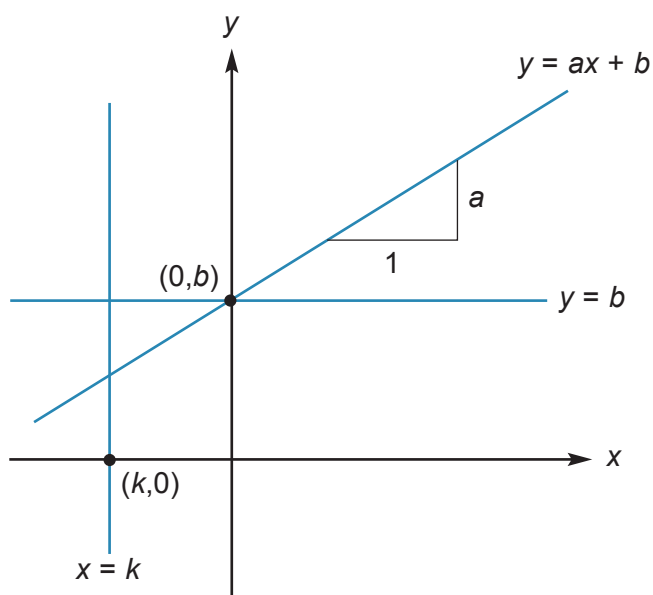
Ikke-lodret linje:

$$y = ax + b$$

a : Stigningstal, hældningskoefficient

b : Skæring med y -aksen

Vandret linje: $y = b$ ($a = 0$)

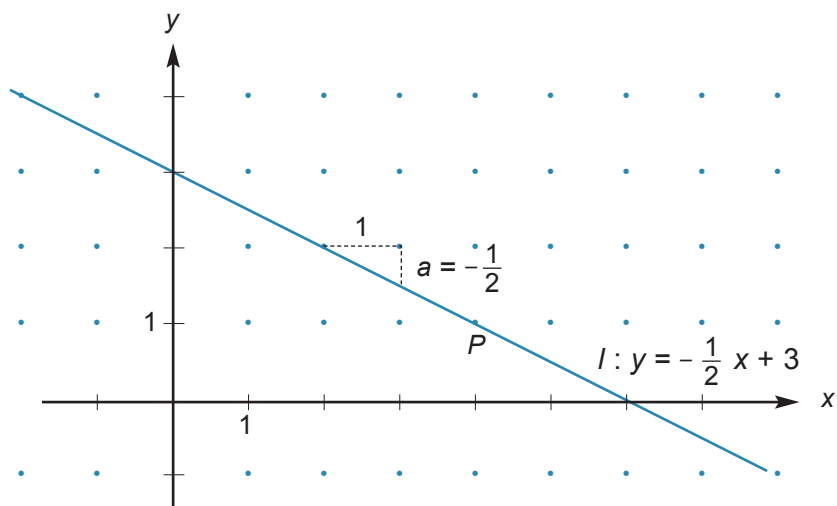


Eksempel:

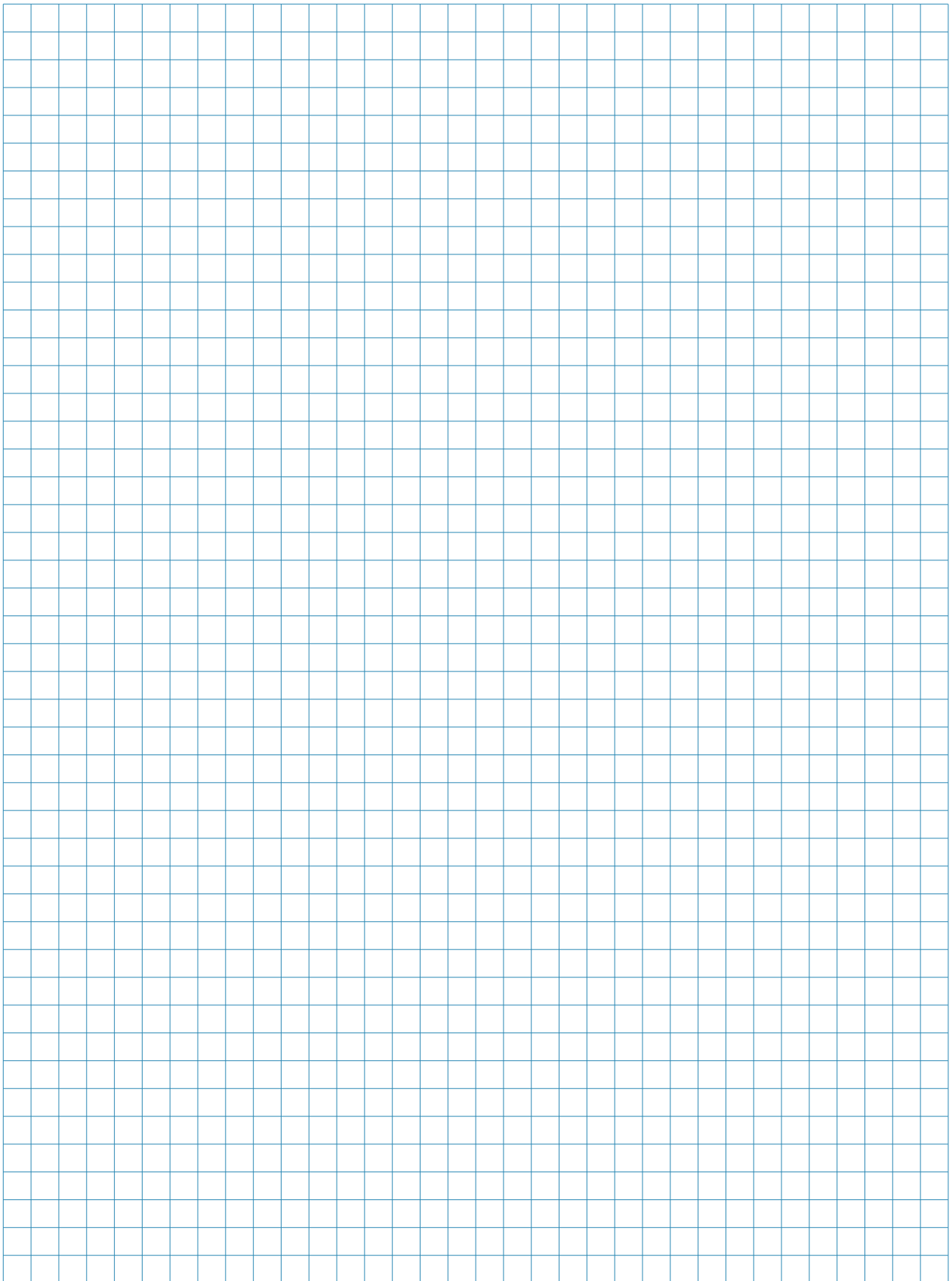
$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Stigningstal $-\frac{1}{2}$. Linjen skærer y -aksen i punktet $(0,3)$

Punktet $P(4,1)$ ligger på linjen l ,
fordi $-\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = -2 + 3 = 1$



Til egne notater



Grafisk ligningsløsning

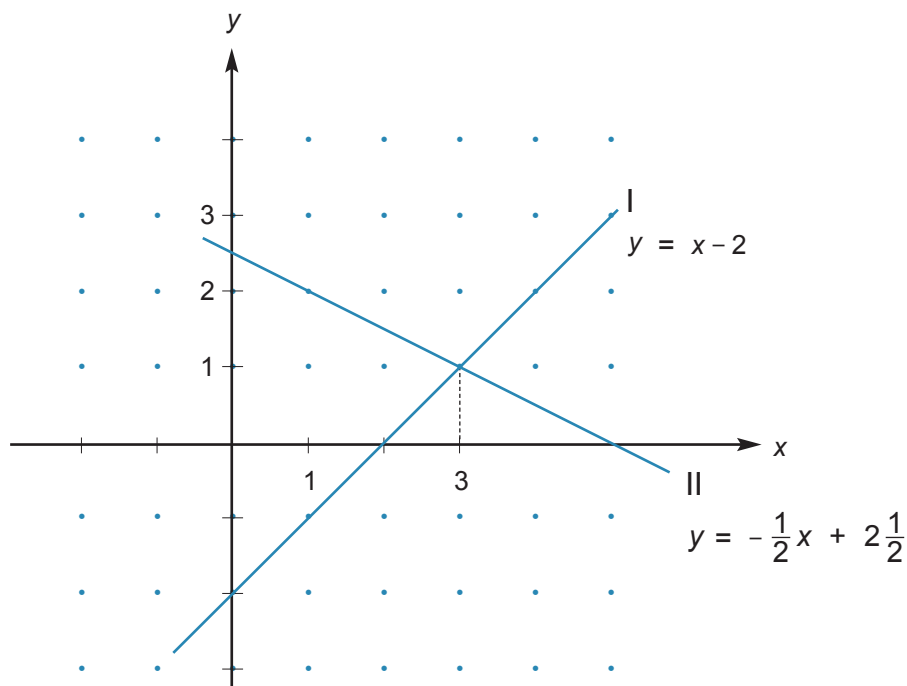
Ligning

$$x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

I: $y = x - 2$

II: $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

Løsning: $x = 3$



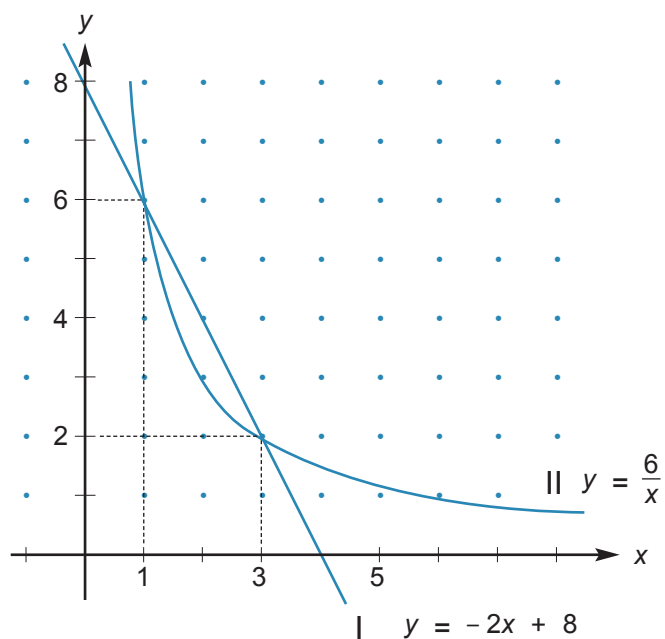
To ligninger med to ubekendte

$$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

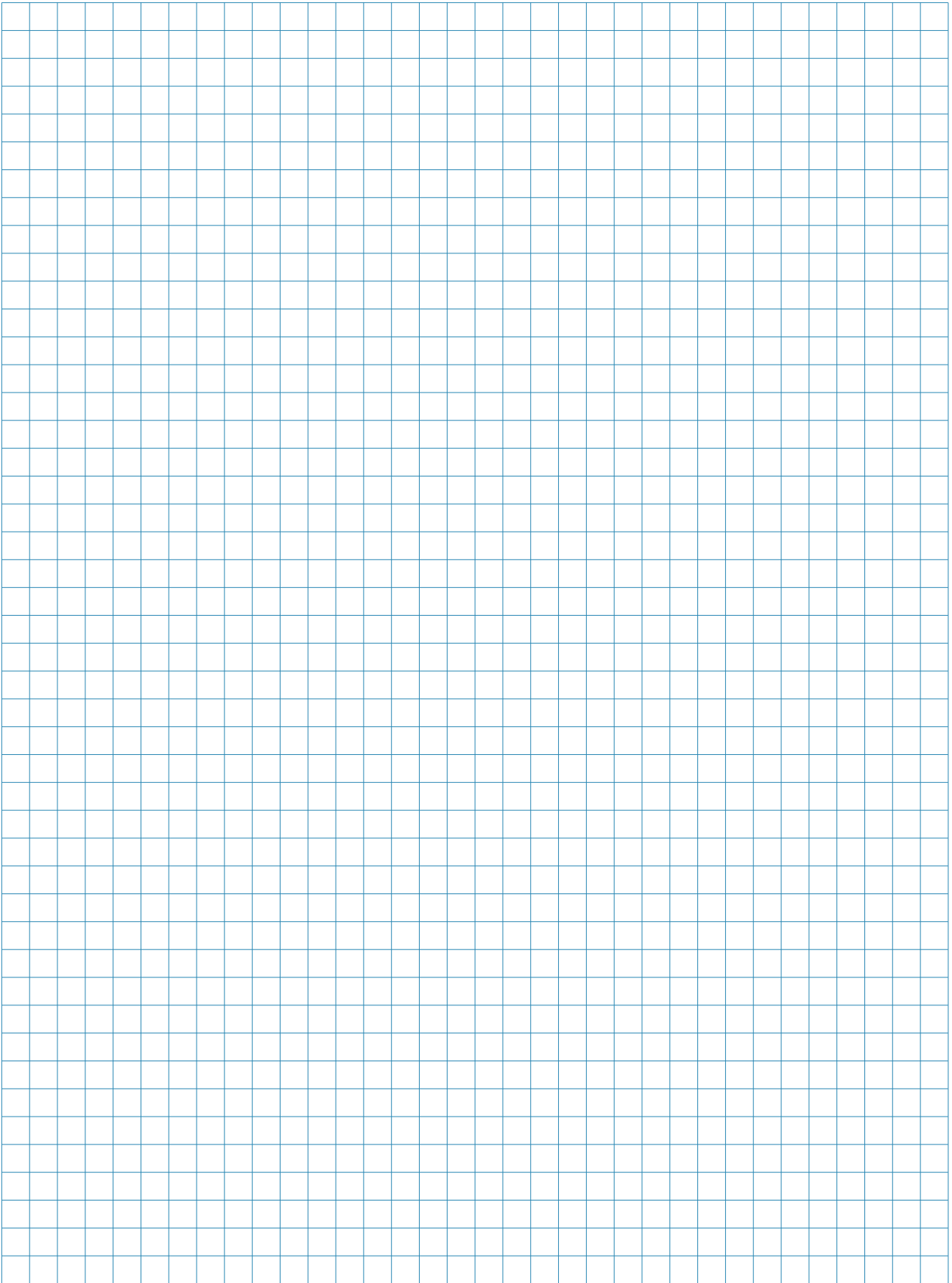
I: $y = -2x + 8$

II: $y = \frac{6}{x}$

Løsninger: $(x,y) = (1,6)$ og $(x,y) = (3,2)$



Til egne notater



Funktioner

Funktionsudtryk:

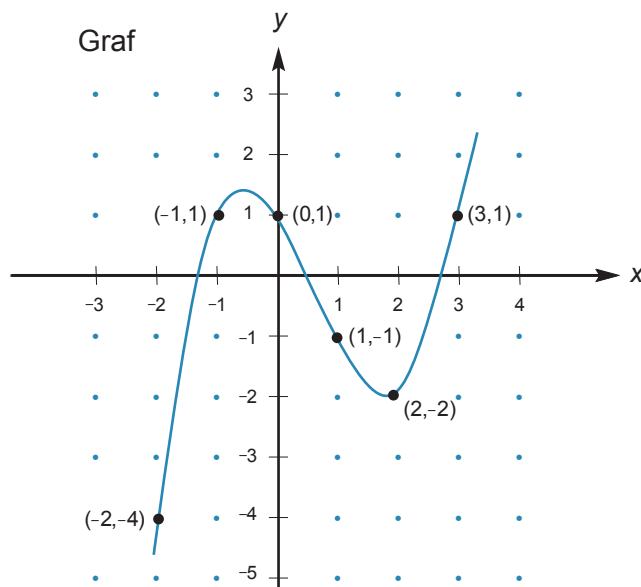
$$y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{2}x + 1$$

eller

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{2}x + 1$$

Tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	1	1	-1	-2	1



Lineær funktion

Forskrift for en lineær funktion:

$$y = ax + b$$

eller

$$f(x) = ax + b$$

Eksempel:

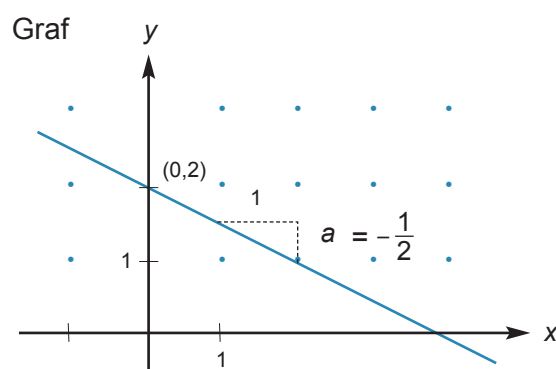
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

eller

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

Tallet a er et udtryk for linjens hældning og kaldes stigningstallet eller hældningskoefficienten.

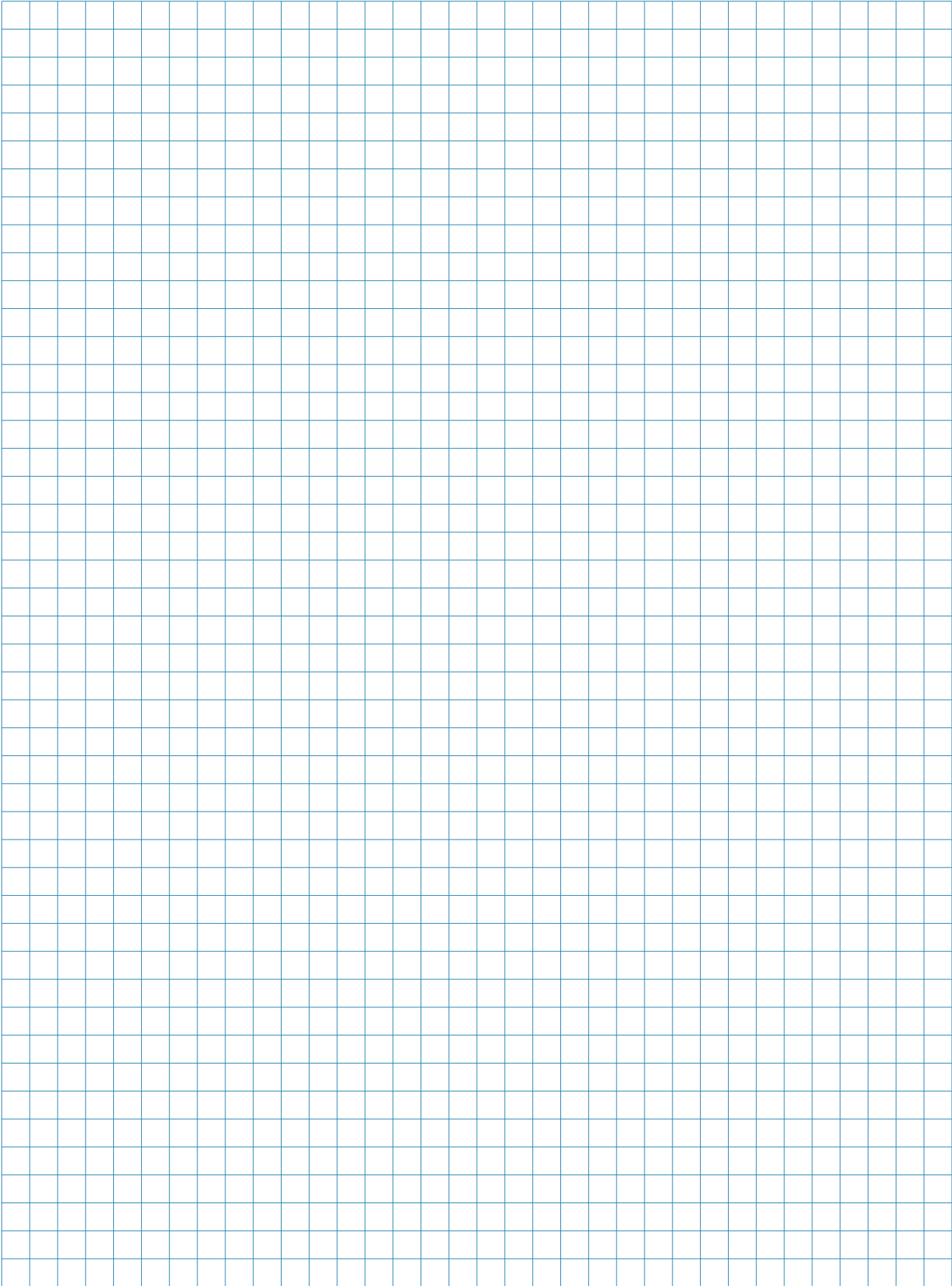
Skæringspunkt med y -aksen: $(0, b)$



Tabel:

x	-2	0	2
y	3	2	1

Til egne notater



Andre funktionstyper

Andengradsfunktion

Forskrift for andengradsfunktion:

$$y = ax^2 + bx + c$$

eller

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

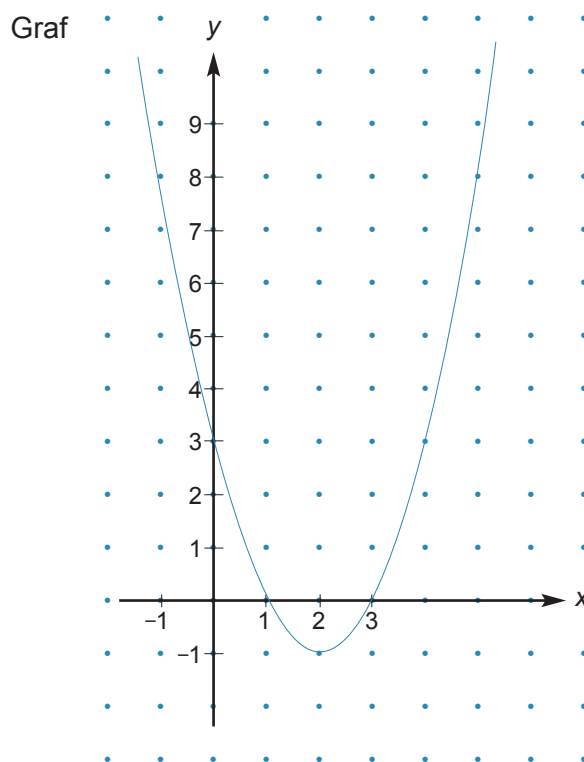
Eksempel:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

eller

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

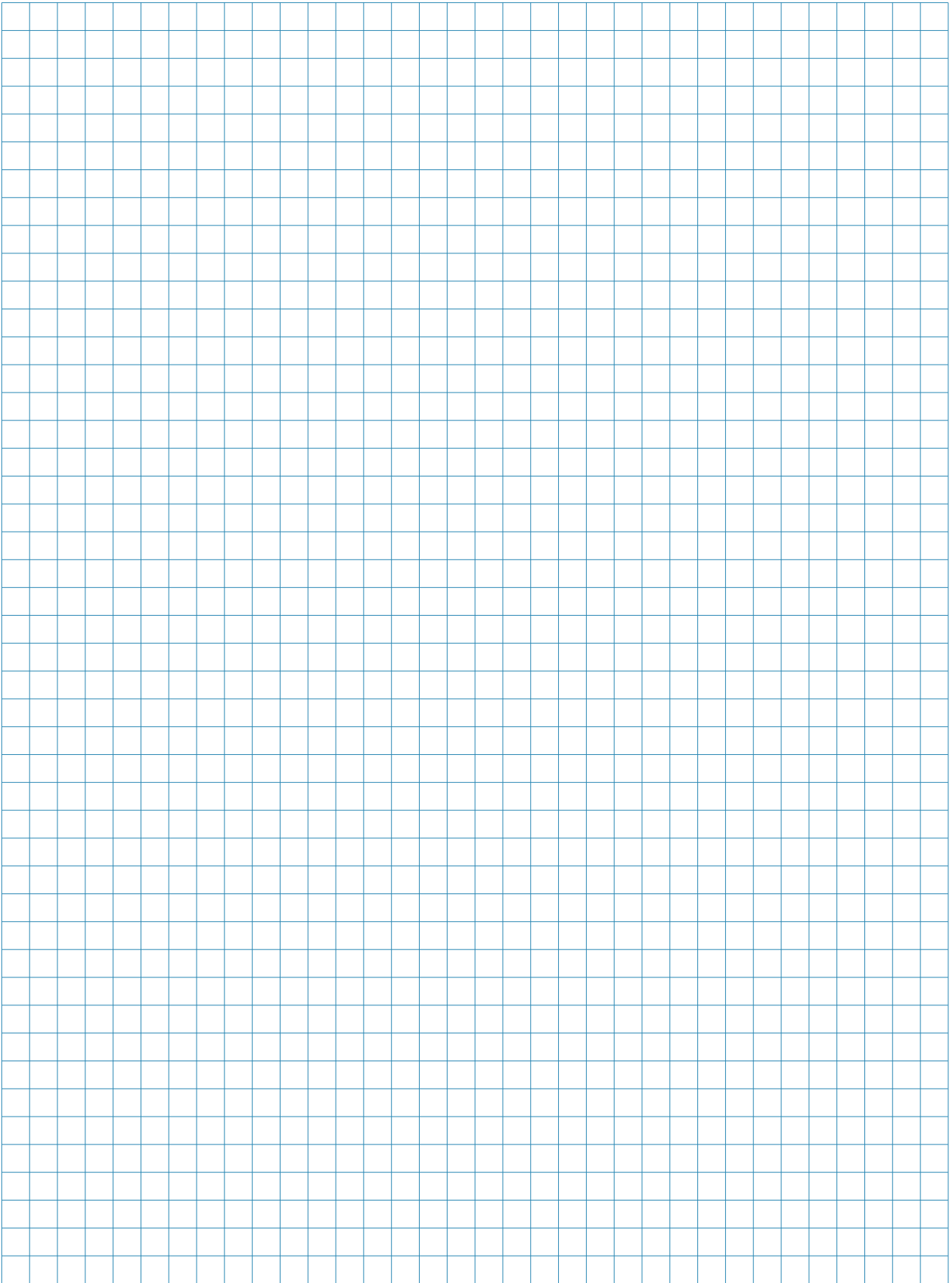
Grafen kaldes en parabel.
Funktionen kaldes også et
andengradspolynomium.



Tabel:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3	8

Til egne notater



Ligefrem proportionalitet

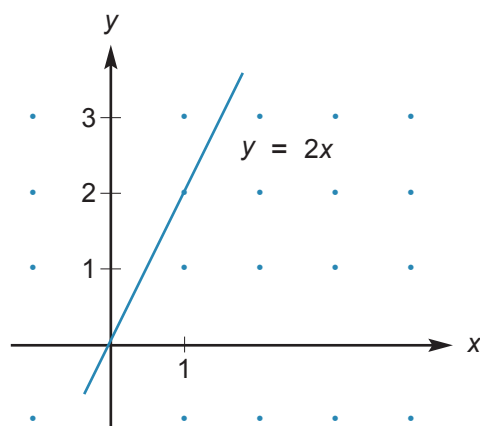
Forskrift for ligefrem proportionalitet:

$$y = ax$$

eller

$$f(x) = ax$$

Eksempel:



Omvendt proportionalitet

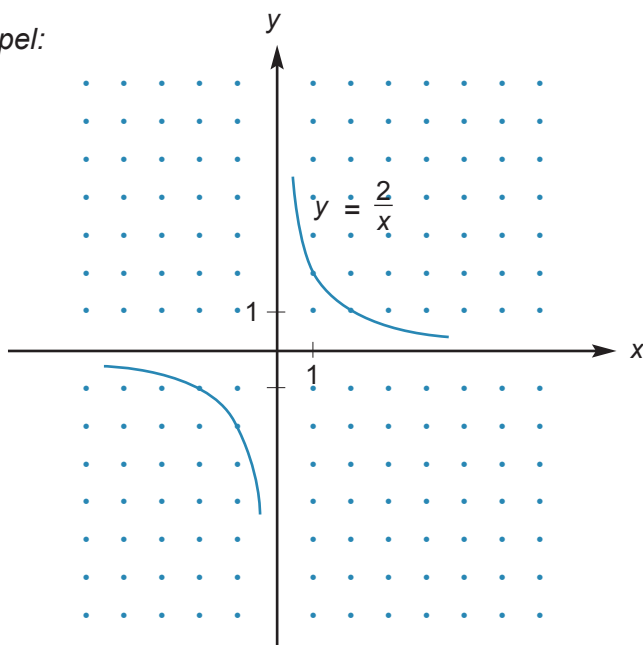
Forskrift for omvendt proportionalitet:

$$y = \frac{a}{x} \quad x \neq 0$$

eller

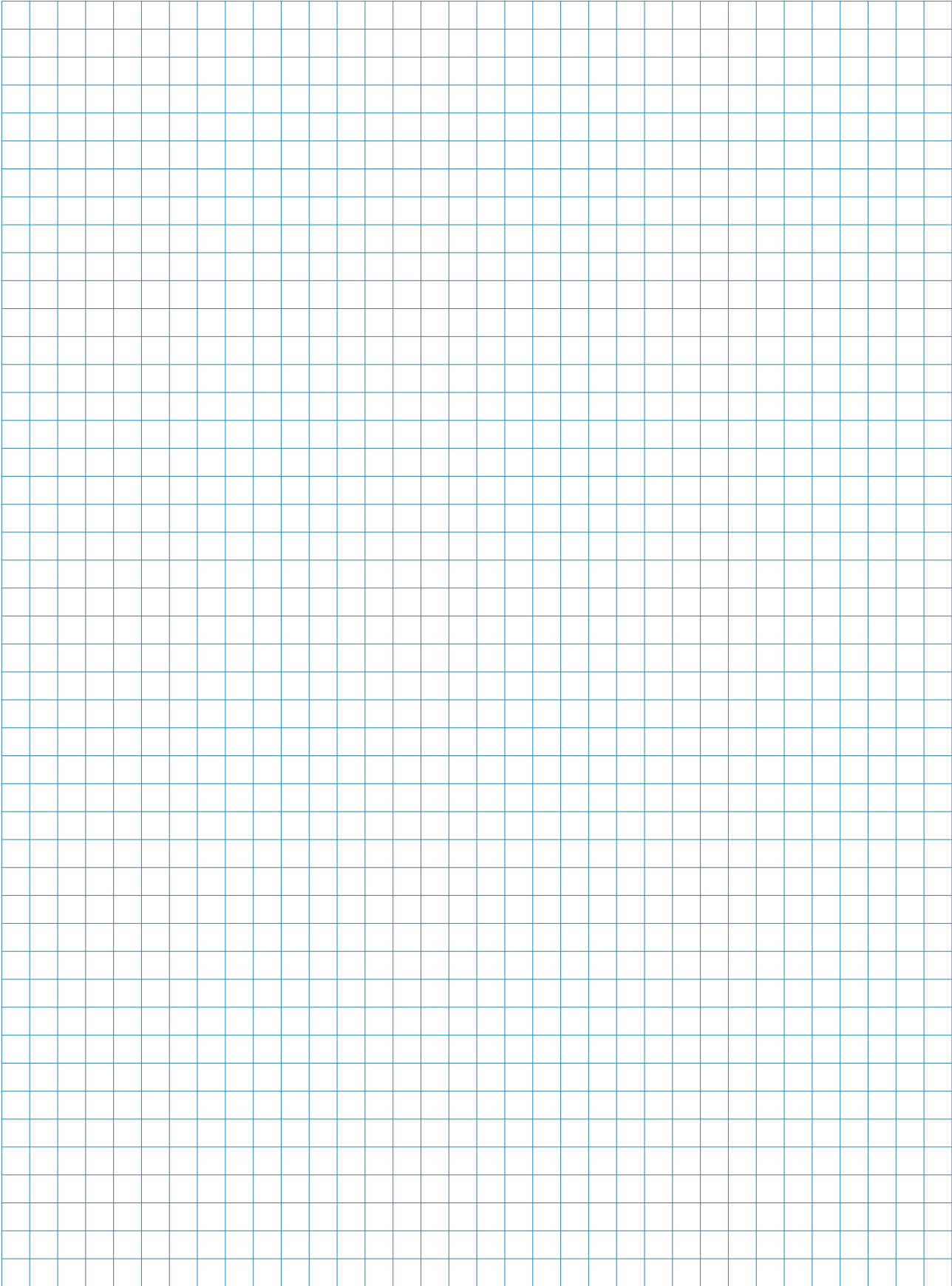
$$f(x) = \frac{a}{x}$$

Eksempel:



Grafen kaldes en hyperbel.

Til egne notater



Vækstfunktioner

Lineær vækst

$$y = ax + b$$

a : vækst pr. periode

b : begyndelsesværdi

Hvis a er negativ ($a < 0$), er der tale om et fald.

Ekspontiel vækst

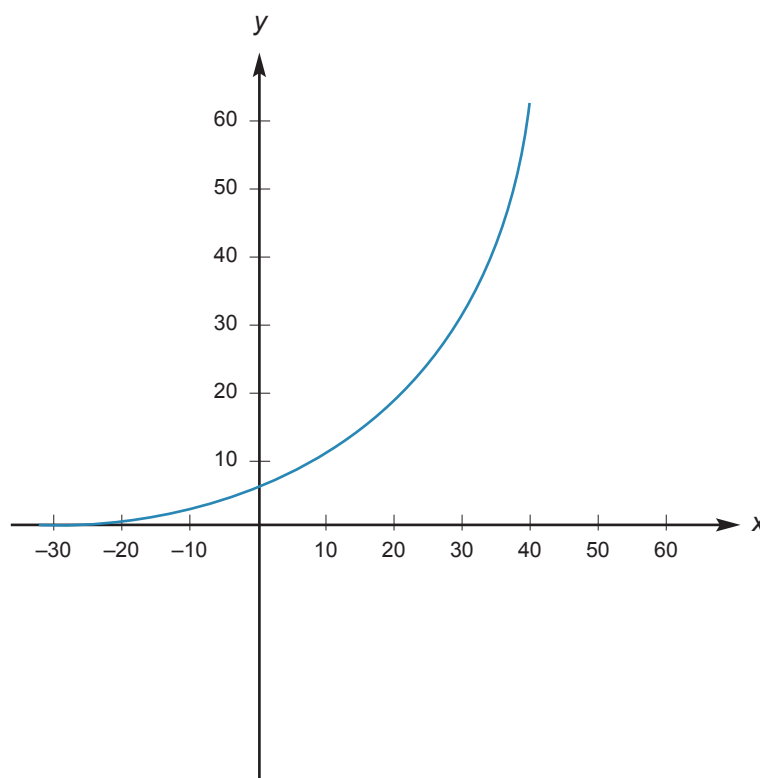
$$y = b \cdot (1 + r)^x \quad r > -1$$

b : begyndelsesværdi

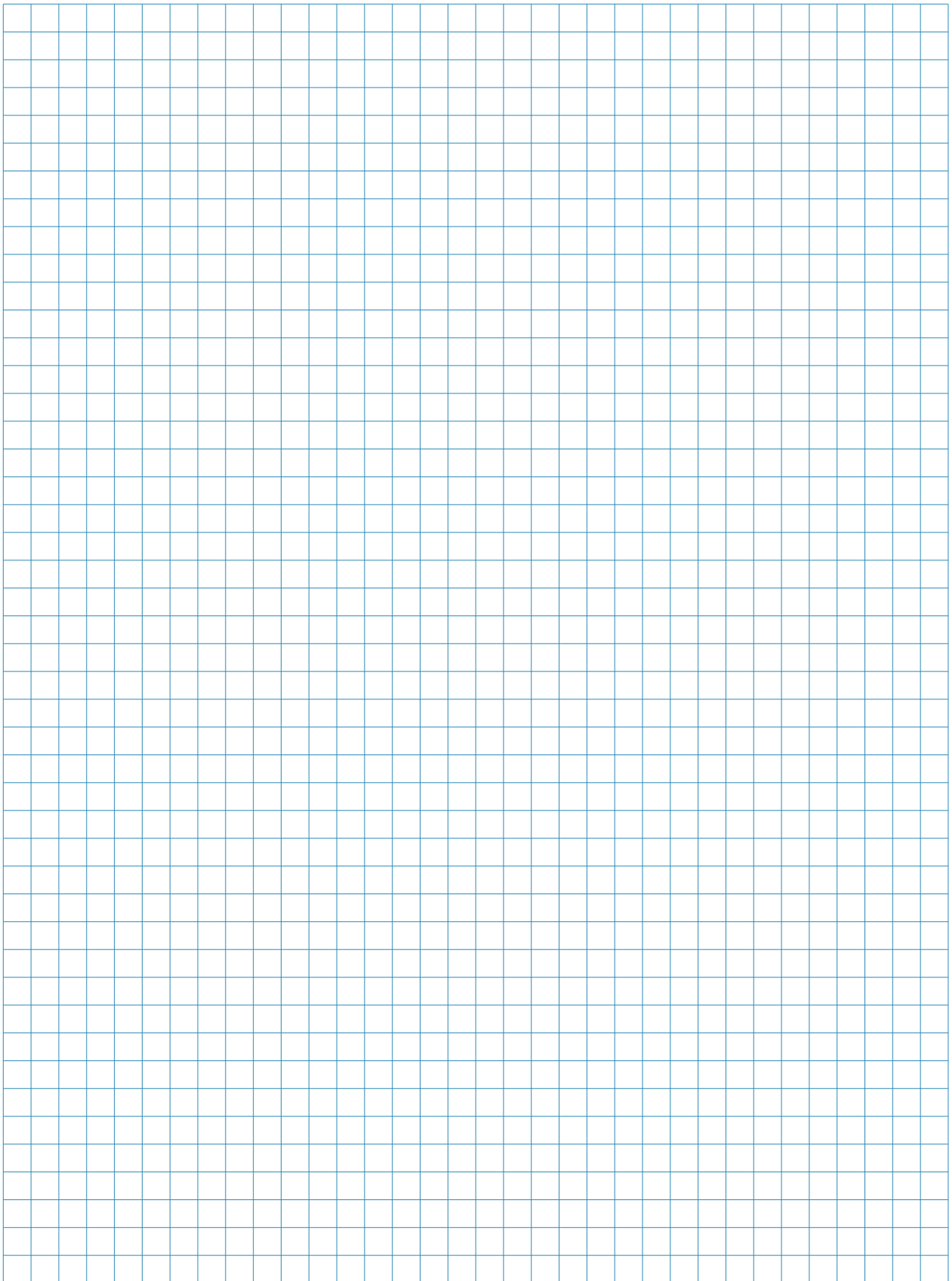
r : vækstprocent pr. periode angivet som decimaltal

x : antal perioder

Hvis r er negativ ($-1 < r < 0$), er der tale om et fald (fx radioaktivt henfald).



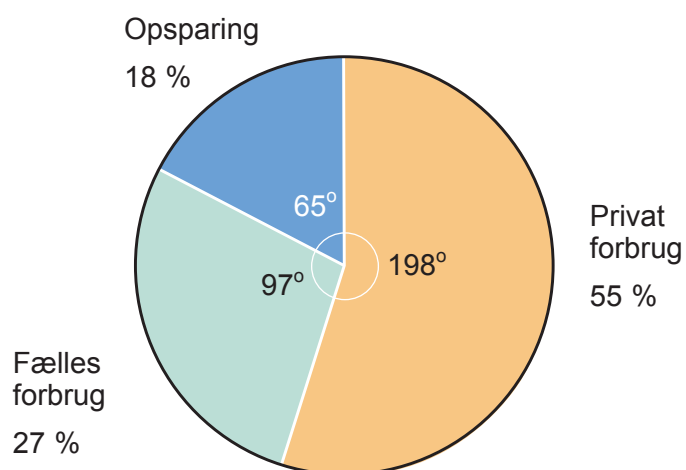
Til egne notater



Statistik

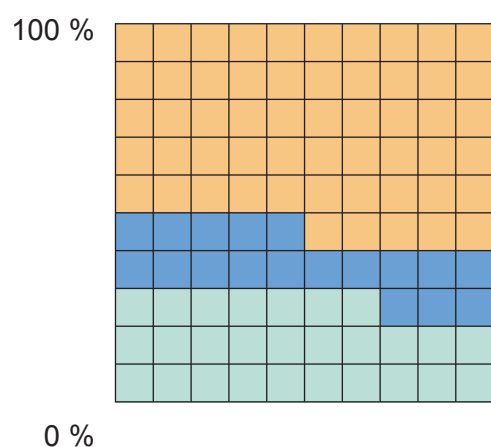
Diagrammer for procentfordeling

Cirkeldiagram

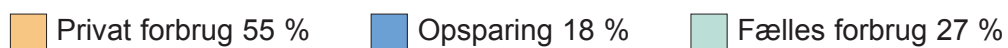
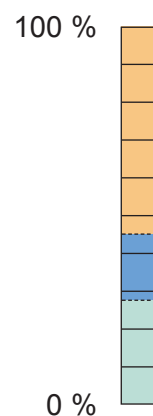


$$27 \% \text{ af } 360^\circ = 97,2^\circ \approx 97^\circ$$

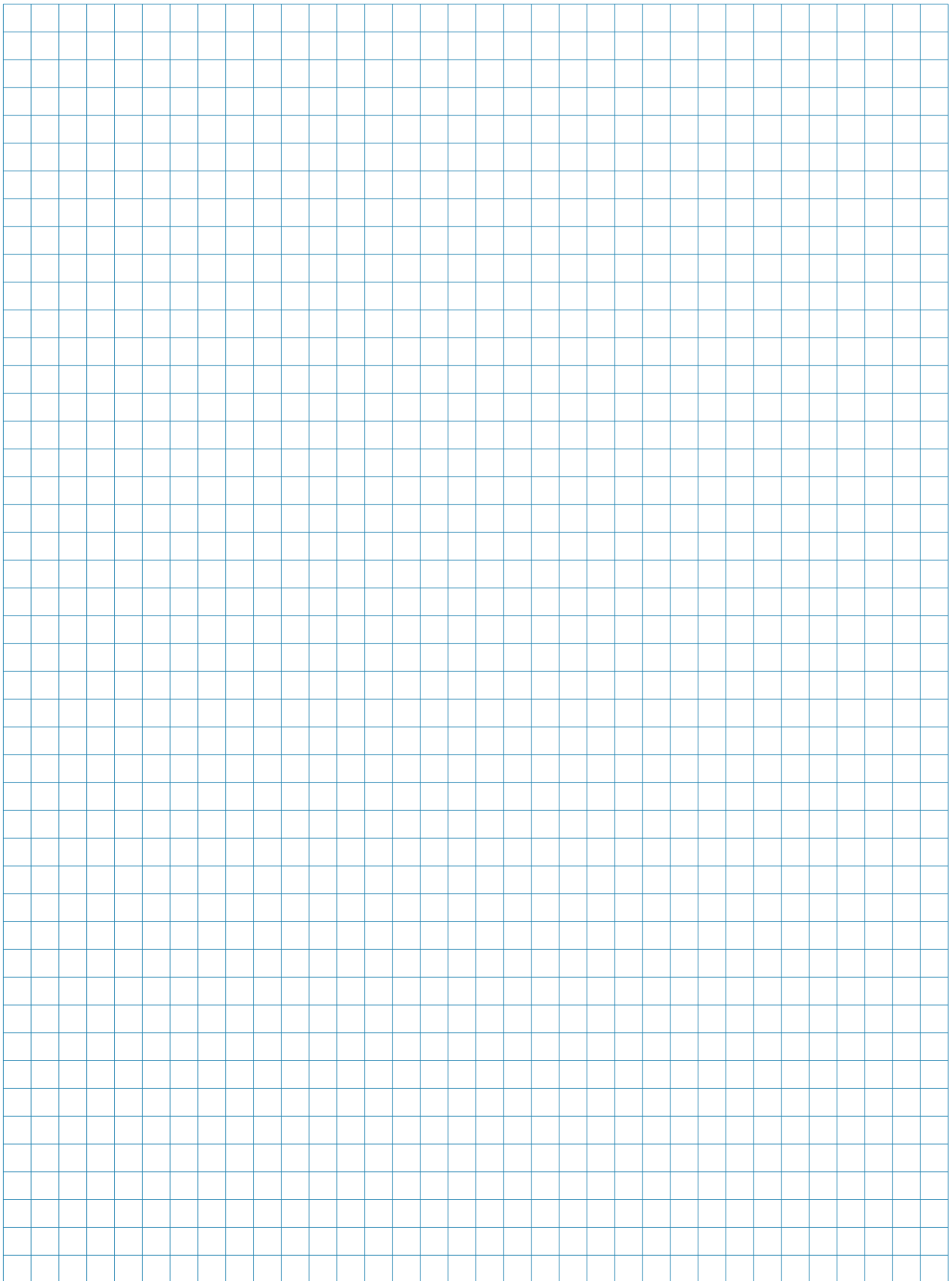
Kvadratdiagram



Stabeldiagram



Til egne notater



Metoder til at beskrive observationssæt med enkeltobservationer

Eksempel:

Karakterfordeling i matematik for en skoles 9. klasser.

Observation x	-3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed $h(x)$	0	0	2	12	15	15	6
Summeret hyppighed $H(x)$	0	0	2	14	29	44	50
Frekvens $f(x)$	0	0	0,04	0,24	0,30	0,30	0,12
Summeret frekvens $F(x)$	0	0	0,04	0,28	0,58	0,88	1,00

Statistiske deskriptorer

Observationssættets størrelse: 50

Typetal: 7 og 10

Middeltal: $\frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 12 + 7 \cdot 15 + 10 \cdot 15 + 12 \cdot 6}{50} = 7,58$

Median: 7

Størsteværdi: 12

Mindsteværdi: 02

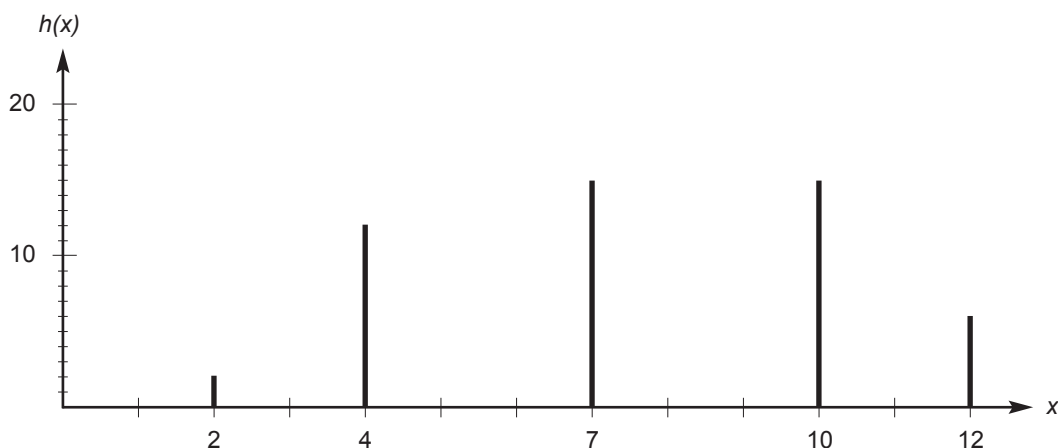
Variationsbredde: 10

Kvartilsæt: (4, 7, 10)

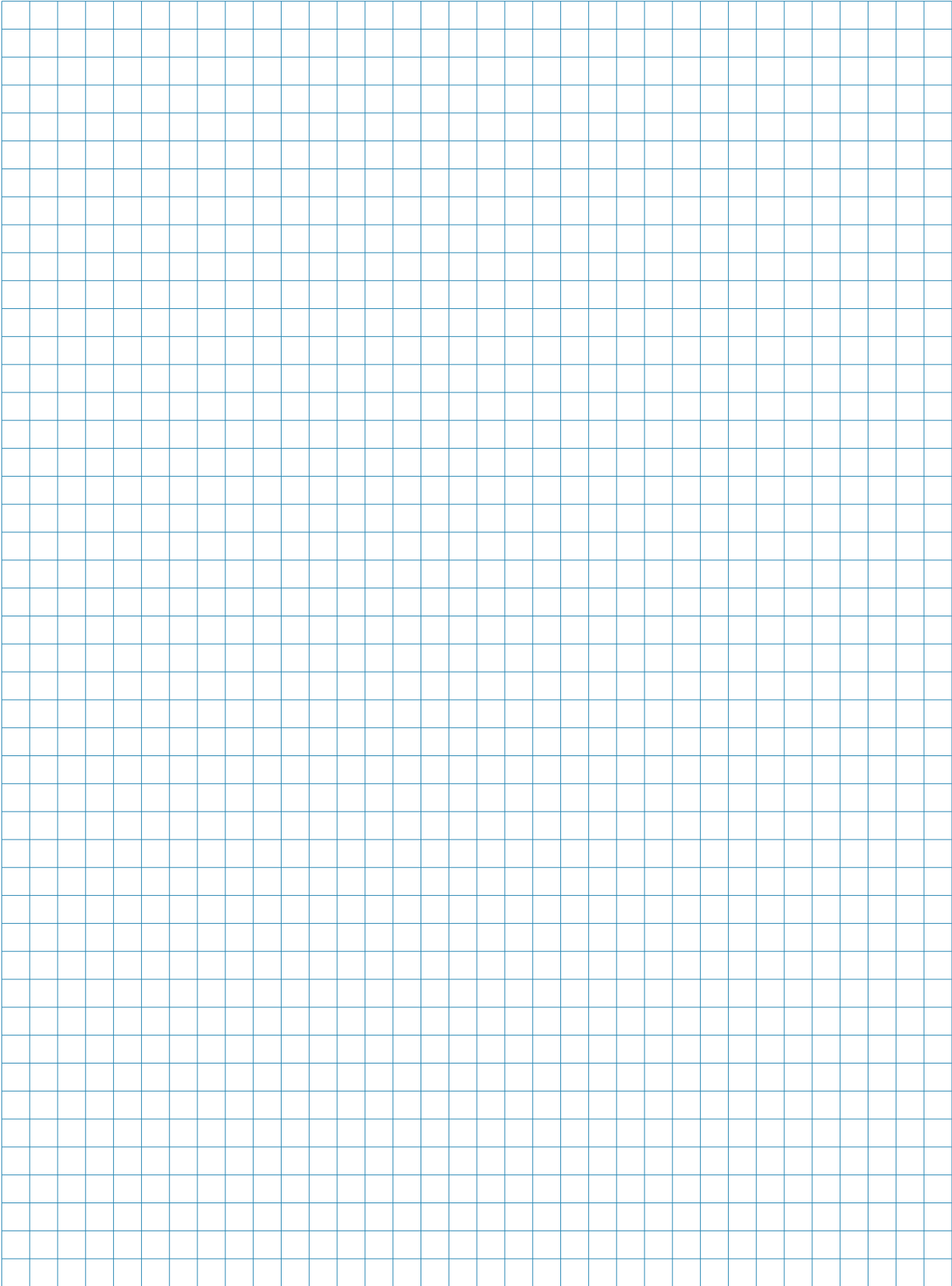
Metoder til at illustrere observationssæt med enkeltobservationer

Karakterfordelingen kan illustreres med diagrammer.

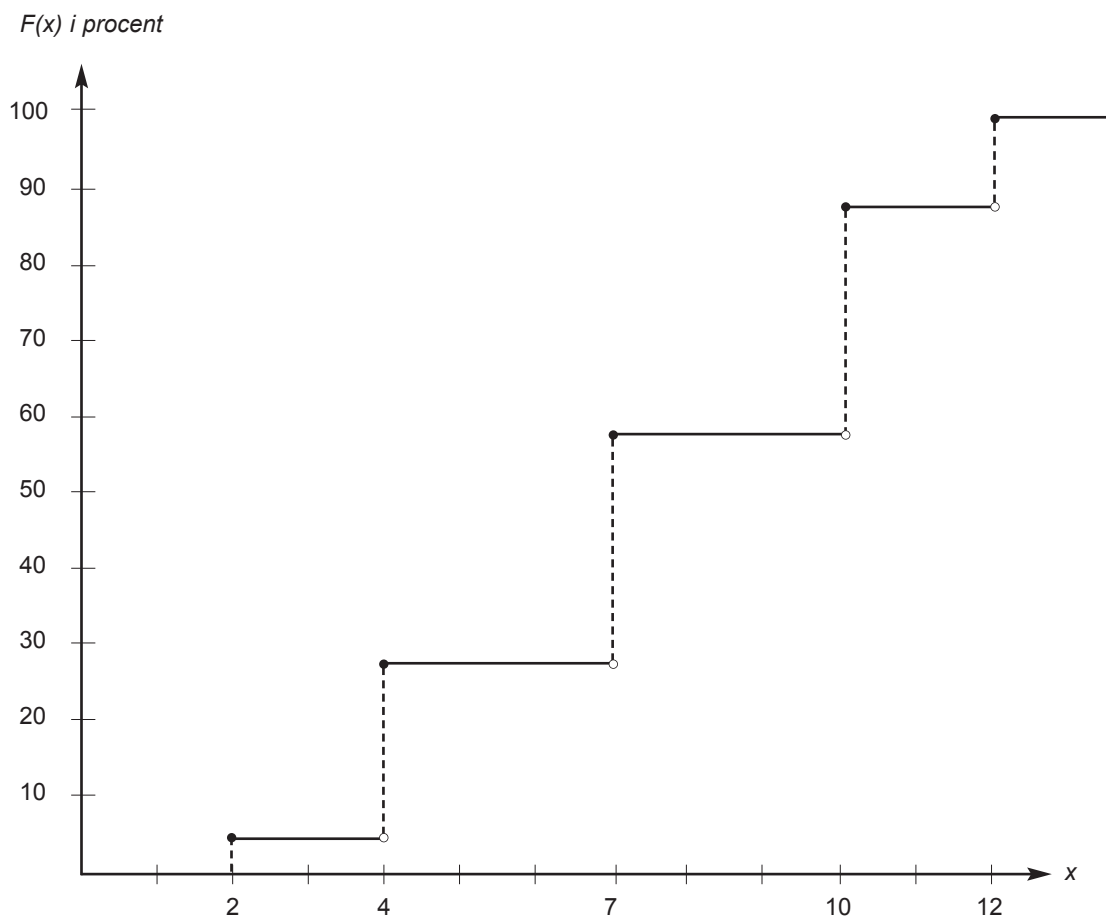
Pindediagram



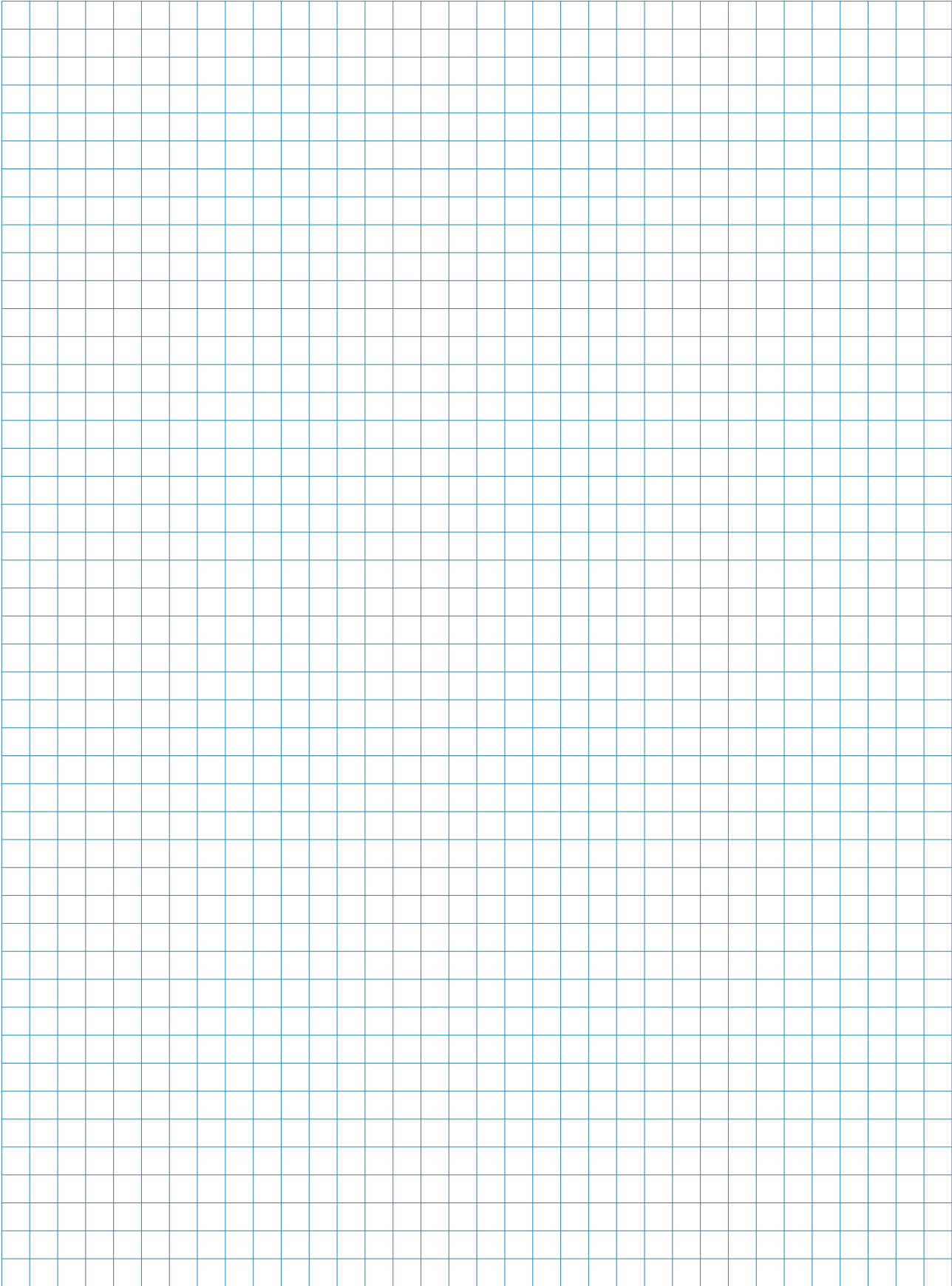
Til egne notater



Trappediagram



Til egne notater



Metoder til at beskrive grupperede observationssæt

Observationerne findes i intervaller $I =]a; b]$.

Eksempel:

Højdefordelingen i nogle 10. klasser.

Interval $I =]a; b]$]150; 160]]160; 170]]170; 180]	I alt
Intervalhyppighed $h(I)$	4	16	60	80
Summeret intervalhyppighed $H(b)$	4	20	80	
Intervalfrekvens $f(I)$	0,05 = 5 %	0,20 = 20 %	0,75 = 75 %	1,00=100 %
Summeret intervalfrekvens $F(b)$	0,05 = 5 %	0,25 = 25 %	1,00 = 100 %	

Statistiske deskriptorer:

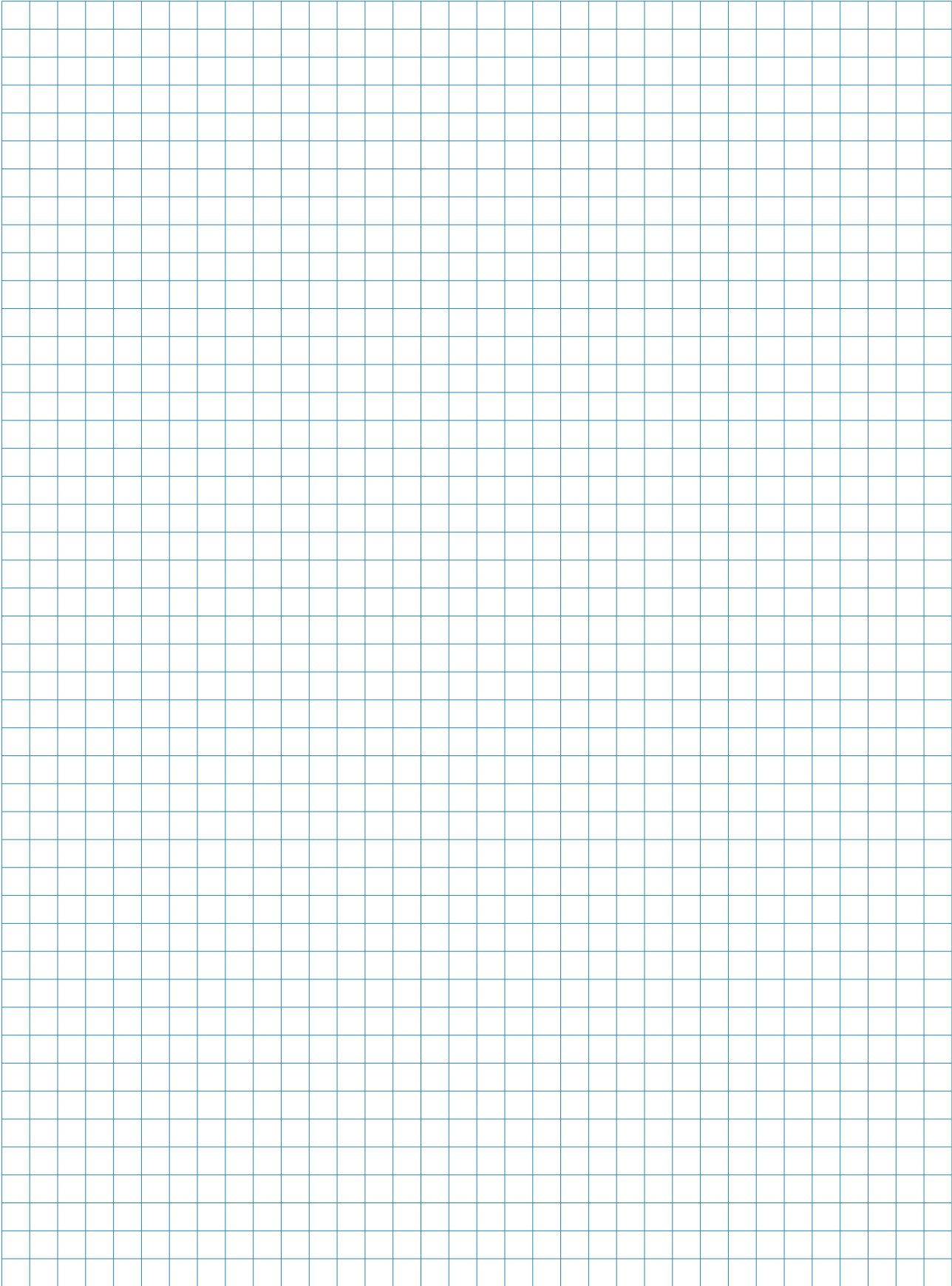
Observationssættets størrelse: 80

Typeinterval:]170; 180]

Middeltal: $155 \cdot 0,05 + 165 \cdot 0,20 + 175 \cdot 0,75 = 172$

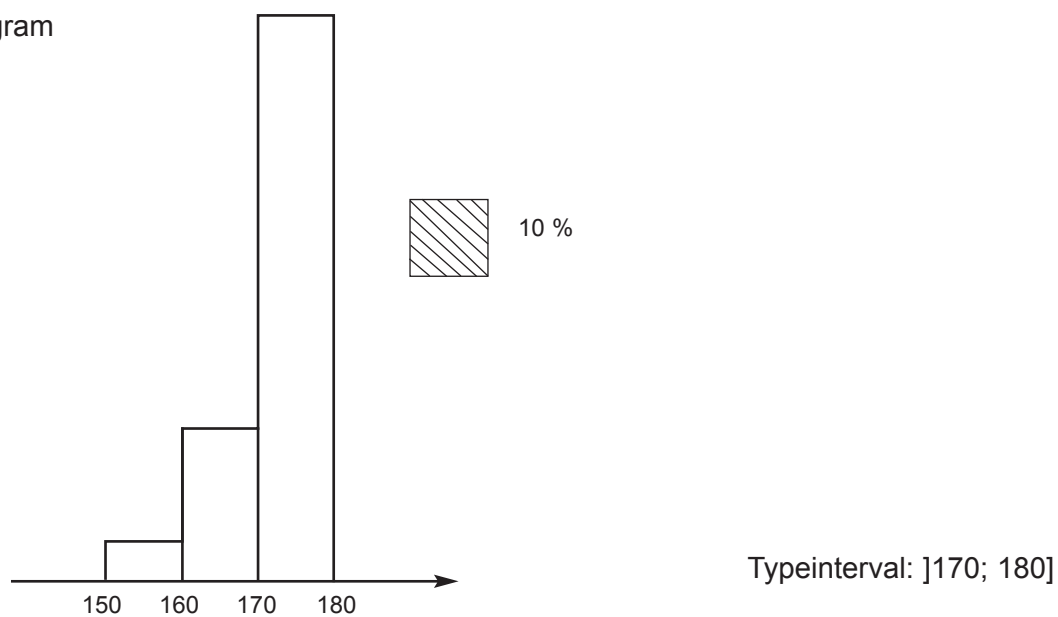
Kvartilsæt (se side 68): (170, 173, 177)

Til egne notater

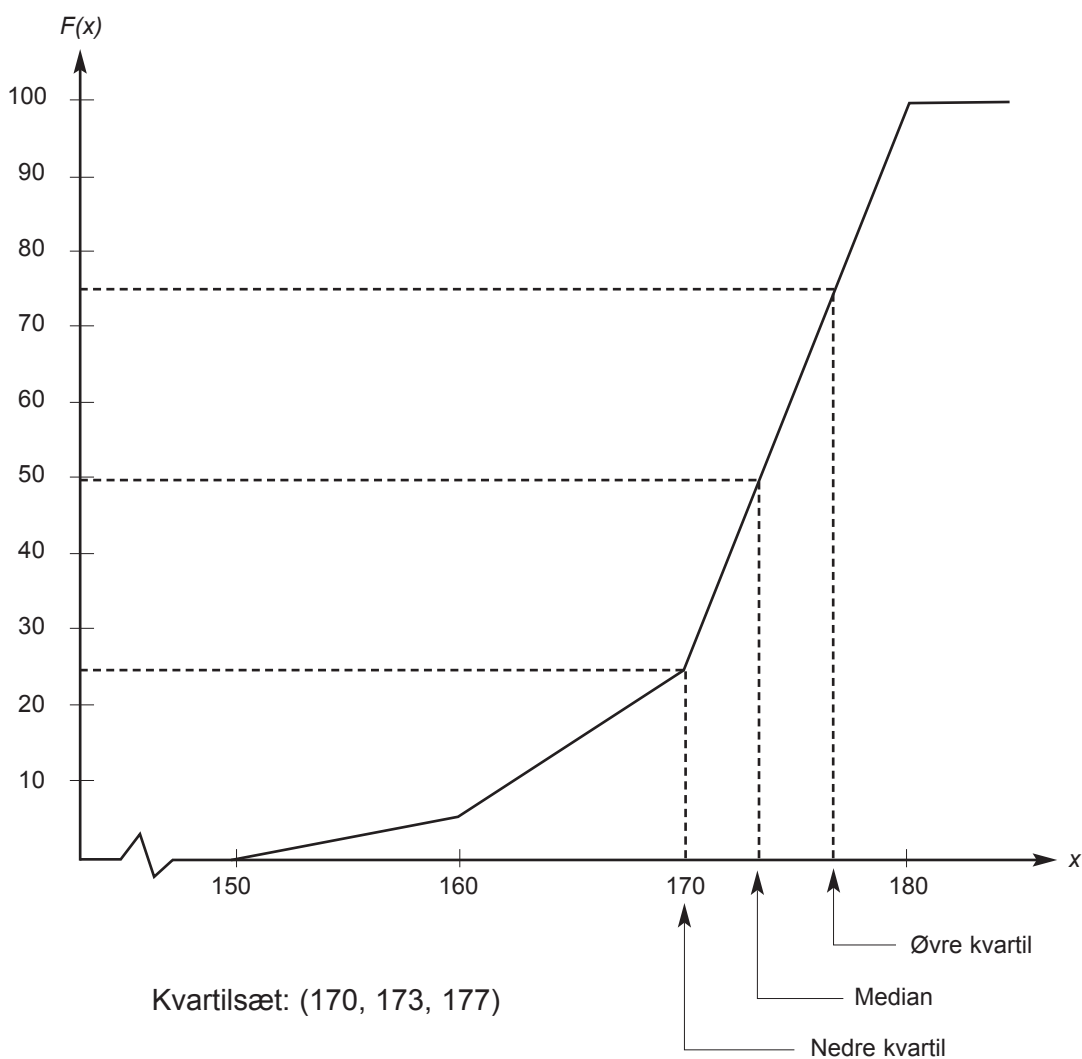


Metoder til at illustrere grupperede observationsæt

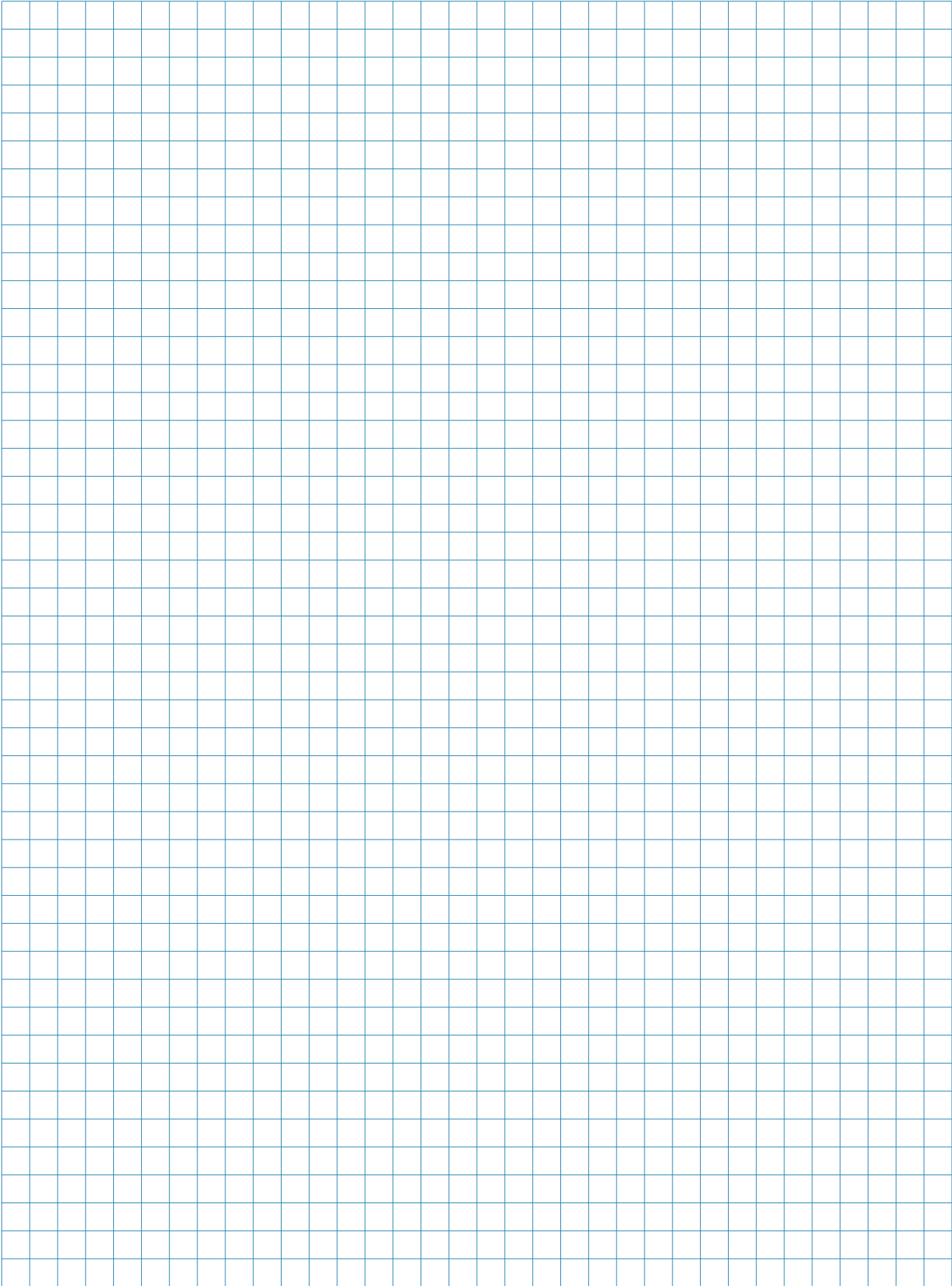
Histogram



Sumkurve



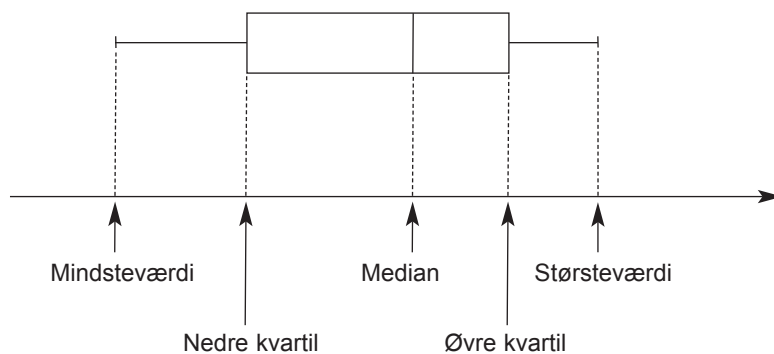
Til egne notater



Sammenligninger mellem observationssæt af forskellig størrelse

Til sammenligning af observationssæt af samme art men af forskellig størrelse bruges frekvenser og summerede frekvenser. Man kan desuden sammenligne mindsteværdi, kvartilsæt, størsteværdi mv.

Mange af disse oplysninger kan samles i et diagram som dette:

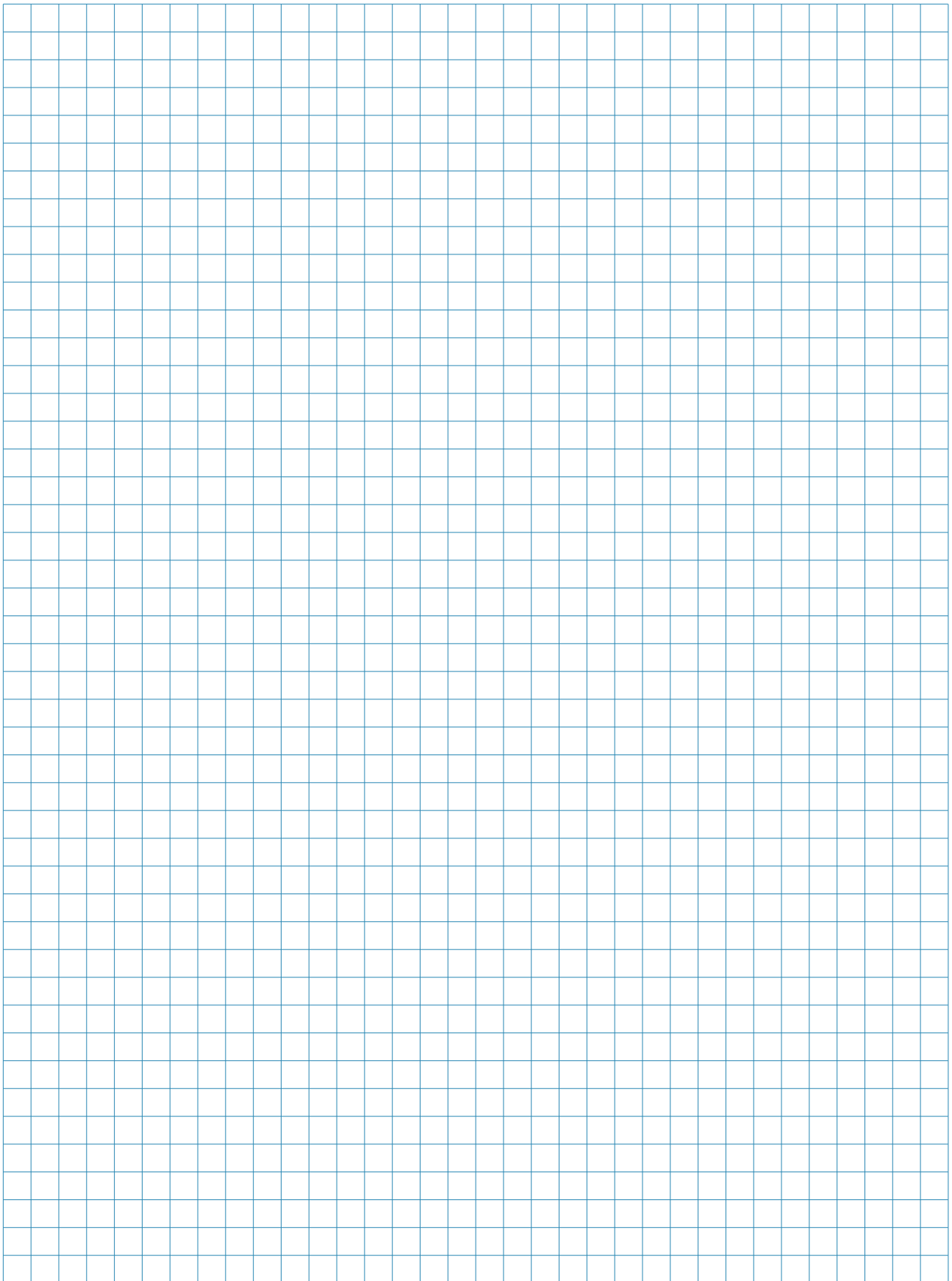


Diagrammet kaldes et **boksplot**.

En sammenligning af observationssæt kræver kommentarer til de indsamlede data.

Kommentarer skal bygge på det indsamlede materiale.

Til egne notater



Eksempel med mulige kommentarer:

9.A med 15 elever og 9.B med 21 elever vil sammenligne deres resultater i højdespring.

Ordrede resultater i 9. A (angivet i cm):

100, 100, 105, 115, 120, 125, 130, 130, 130, 135, 135, 135, 135, 155, 170

Mindsteværdi: 100

Størsteværdi: 170

Variationsbredde: 70

Kvartilsæt: $(117\frac{1}{2}, 130, 135)$

Ordrede resultater i 9. B (angivet i cm):

110, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 120, 120, 120, 120, 120, 120, 125, 125, 125, 125, 125, 125, 130

Mindsteværdi: 110

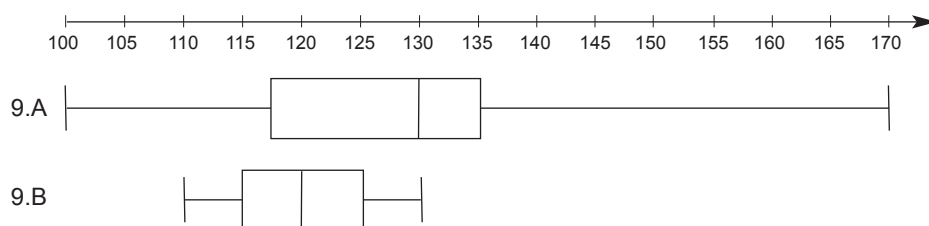
Størsteværdi: 130

Variationsbredde: 20

Kvartilsæt: (115, 120, 125)

Sammenligning.

Det er muligt at sammenligne de to observationssæt ved at tegne disse diagrammer:



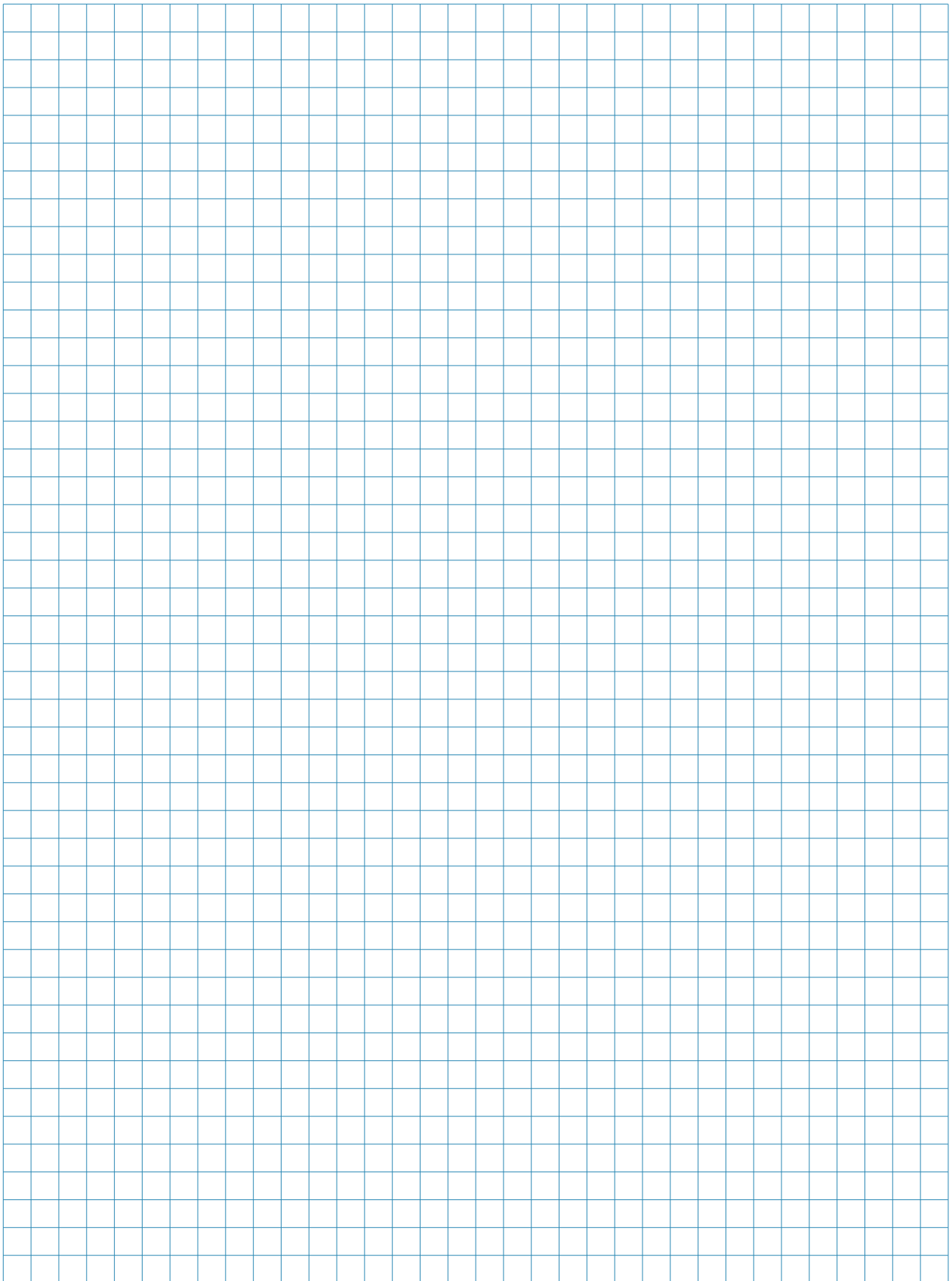
Boksplot for de to klassers resultater i højdespring

Af de to diagrammer kan man bl.a. se, at halvdelen af eleverne i 9.A har sprunget 130 cm eller mere i højdespring. Det tilsvarende resultat i 9.B er 120 cm. Både det største og det mindste resultat findes i 9.A. Der er således større variationsbredde i resultaterne fra 9.A end i resultaterne fra 9.B.

Man kan også se, at afstanden mellem første og tredje kvartil er mindst i 9.B. Det kunne tyde på, at eleverne i 9.B er mere ensartede end eleverne i 9.A med hensyn til højdespring.

Da medianen i 9.A (130 cm) er lig med størsteværdien i 9.B, kan man se, at halvdelen af eleverne i 9.A kan springe højere end eller lige så højt som alle elever i 9.B. Statistikken kan ikke forklare, hvorfor det er tilfældet.

Til egne notater



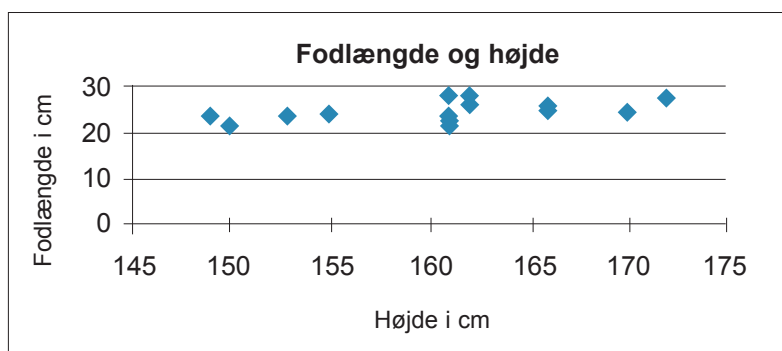
Metoder til at analysere observationsæt

Punktdiagram Et punktdiagram (sammenknytningsdiagram) kan bruges til at undersøge eventuelle sammenhænge mellem variable.

Eksempel:

Er der sammenhæng mellem højde og fodlængde?

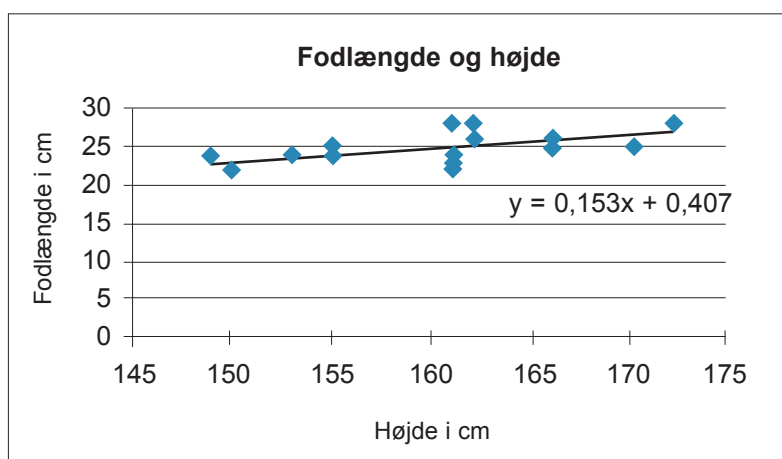
Højde i cm	172	161	153	162	161	166	149	153	162	170	150	161	166	155	155	161
Fodlængde i cm	28	28	24	28	23	26	24	24	26	25	22	24	25	24	25	22



Regression Regression er en metode til at fastlægge en kurve, som passer bedst muligt med punkterne i et punktdiagram.

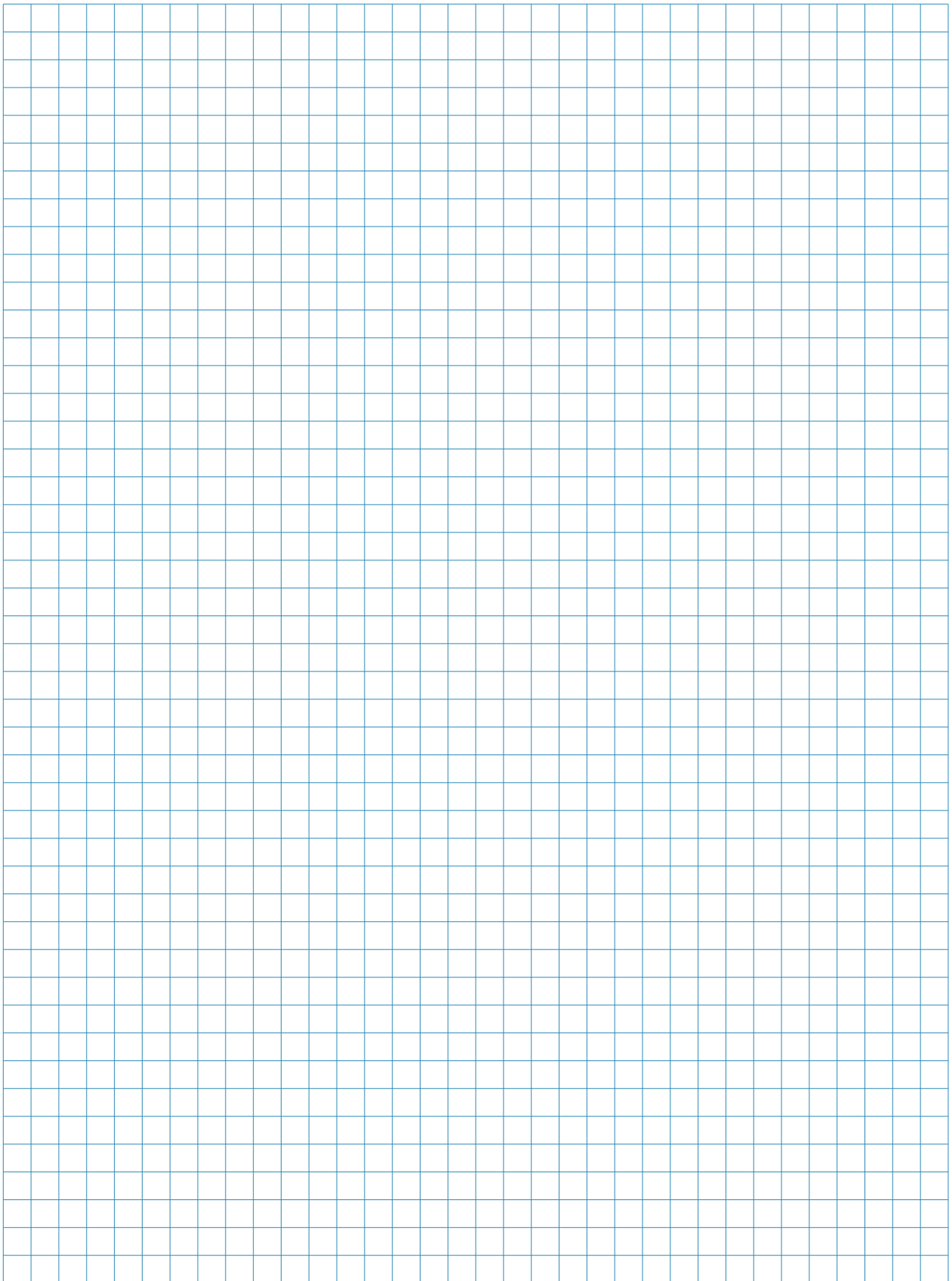
Det kan vurderes ved at se på punkterne i punktdiagrammet, om en sammenhæng mellem variable kan beskrives med en bestemt type funktion.

Eksempel:



Hvis en ret linje passer tilnærmelsesvist til punkterne i punktdiagrammet, er der tale om en lineær sammenhæng mellem de variable. Den rette linje kaldes regressionslinjen eller tendenslinjen.

Til egne notater



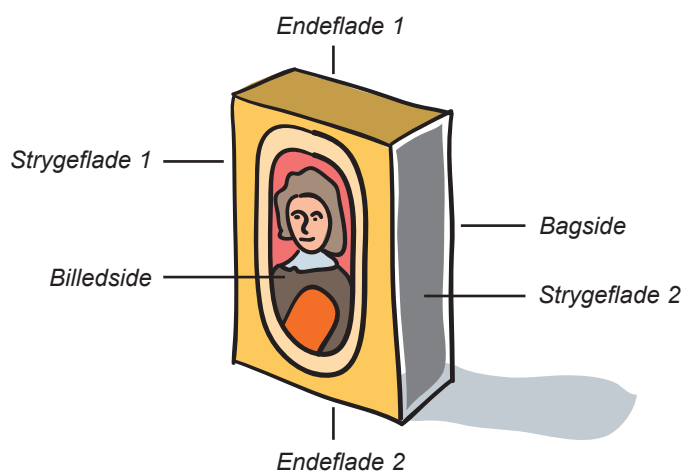
Sandsynlighed

Statistisk sandsynlighed

Eksperiment: Der kastes med en tændstikæske. Hvilken flade vender op?

Udfaldsrummet består af disse udfald:

Billedside, Bagside, Endeflade 1, Endeflade 2, Strygeflade 1, Strygeflade 2

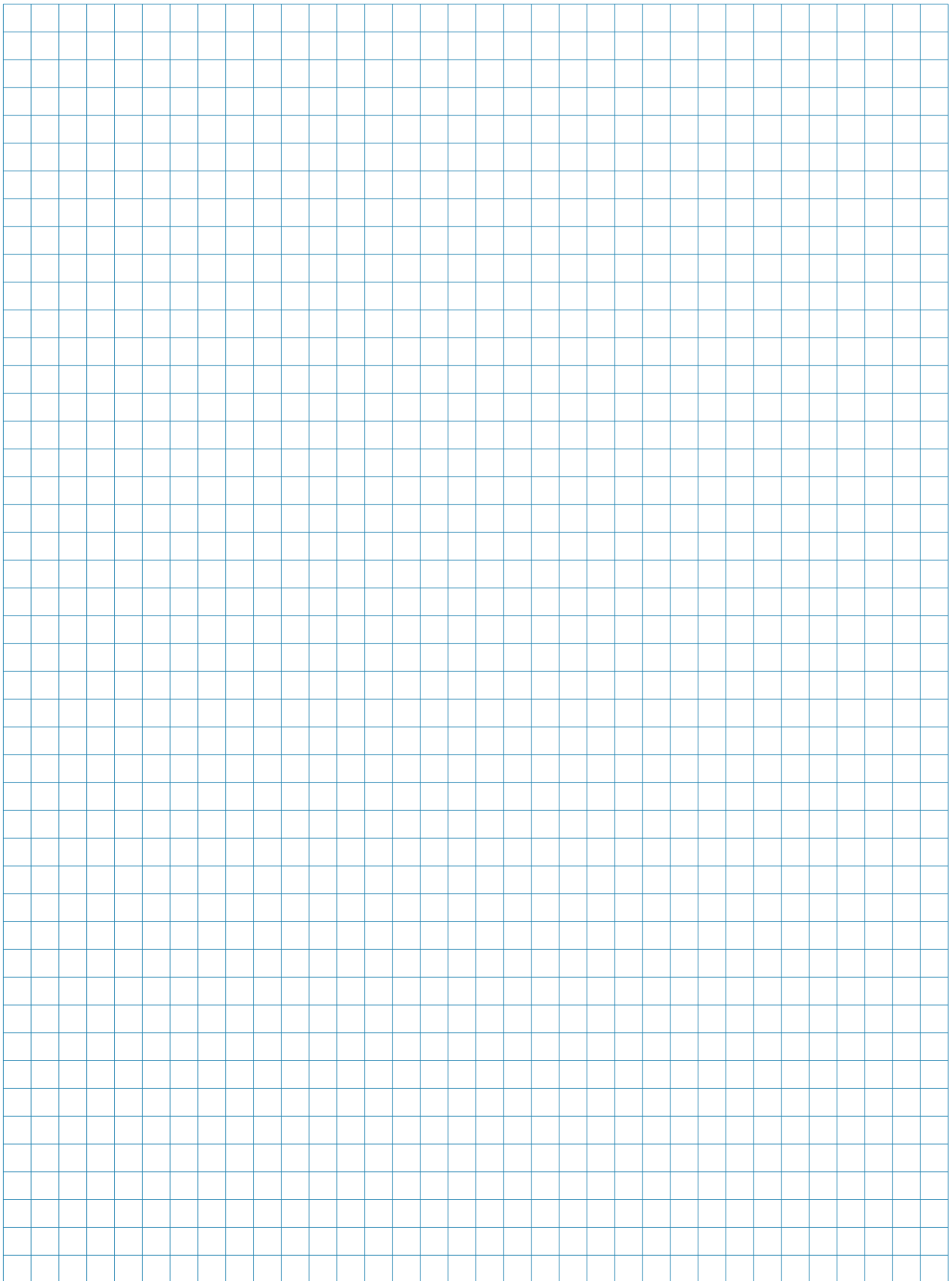


Fordelingstabel for 250 kast med tændstikæsken:

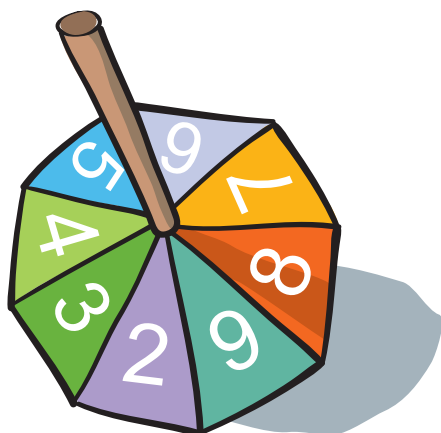
Observation x	Billedside	Bagside	Endeflade 1	Endeflade 2	Strygeflade 1	Strygeflade 2
Hyppighed $h(x)$	98	103	3	6	24	16
Frekvens $f(x)$	$\frac{98}{250}$	$\frac{103}{250}$	$\frac{3}{250}$	$\frac{6}{250}$	$\frac{24}{250}$	$\frac{16}{250}$
	0,392	0,412	0,012	0,024	0,096	0,064
	39,2 %	41,2 %	1,2 %	2,4 %	9,6 %	6,4 %

På baggrund af disse 250 kast er den **statistiske sandsynlighed** for, at billedsiden vender op, lig med $\frac{98}{250} = 0,392 = 39,2 \%$.

Til egne notater



Kombinatorisk sandsynlighed



Sandsynligheden for snurretoppens otte mulige udfald 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 betragtes som lige store. Man siger, at sandsynlighederne er **jævnt fordelt**.

Sandsynligheden for udfaldet "2" skrives $P(2)$.

$$P(2) = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5 \%$$

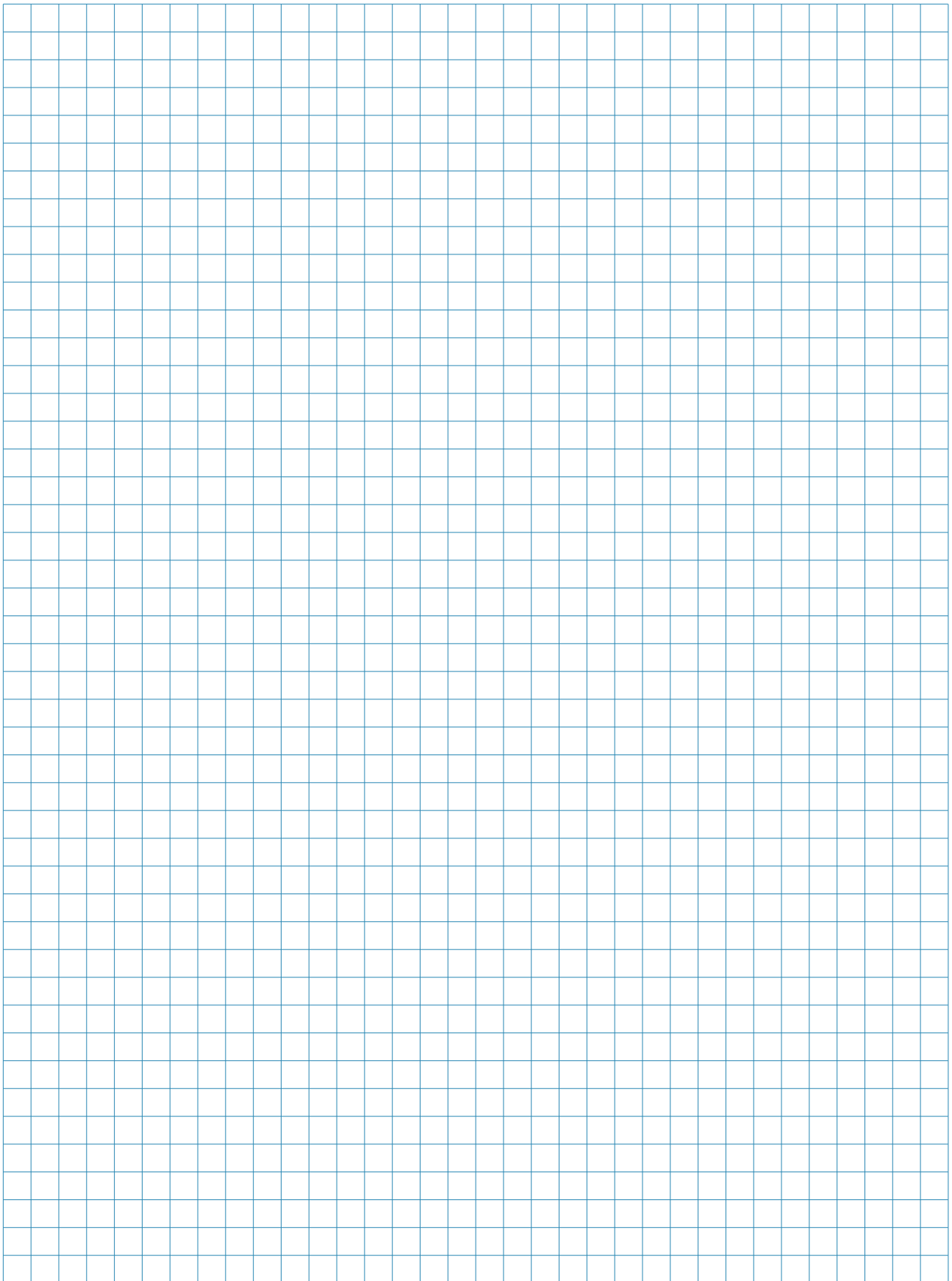
Sandsynligheden for den **hændelse**, at snurretoppen lander på et lige tal, er

$$P(\text{lige tal}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{4}{8} = 0,5 = 50 \%$$

Tallene 2, 4, 6 og 8 kaldes her for hændelsens **gunstige udfald**.

Tallene i udfaldsrummet {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kaldes her for de **mulige udfald**.

Til egne notater



Massefylde og fart

Massefylde

$$\text{massefylde} = \frac{\text{masse}}{\text{rumfang}}$$

Eksempel:

2,4 kg olie har et rumfang på 3 dm³.

$$\text{Massefylden er } \frac{2,4 \text{ kg}}{3 \text{ dm}^3} = 0,8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

I SI-systemet benævnes massefylde $\text{kg/m}^3 = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\text{Dvs. } 0,8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Fart

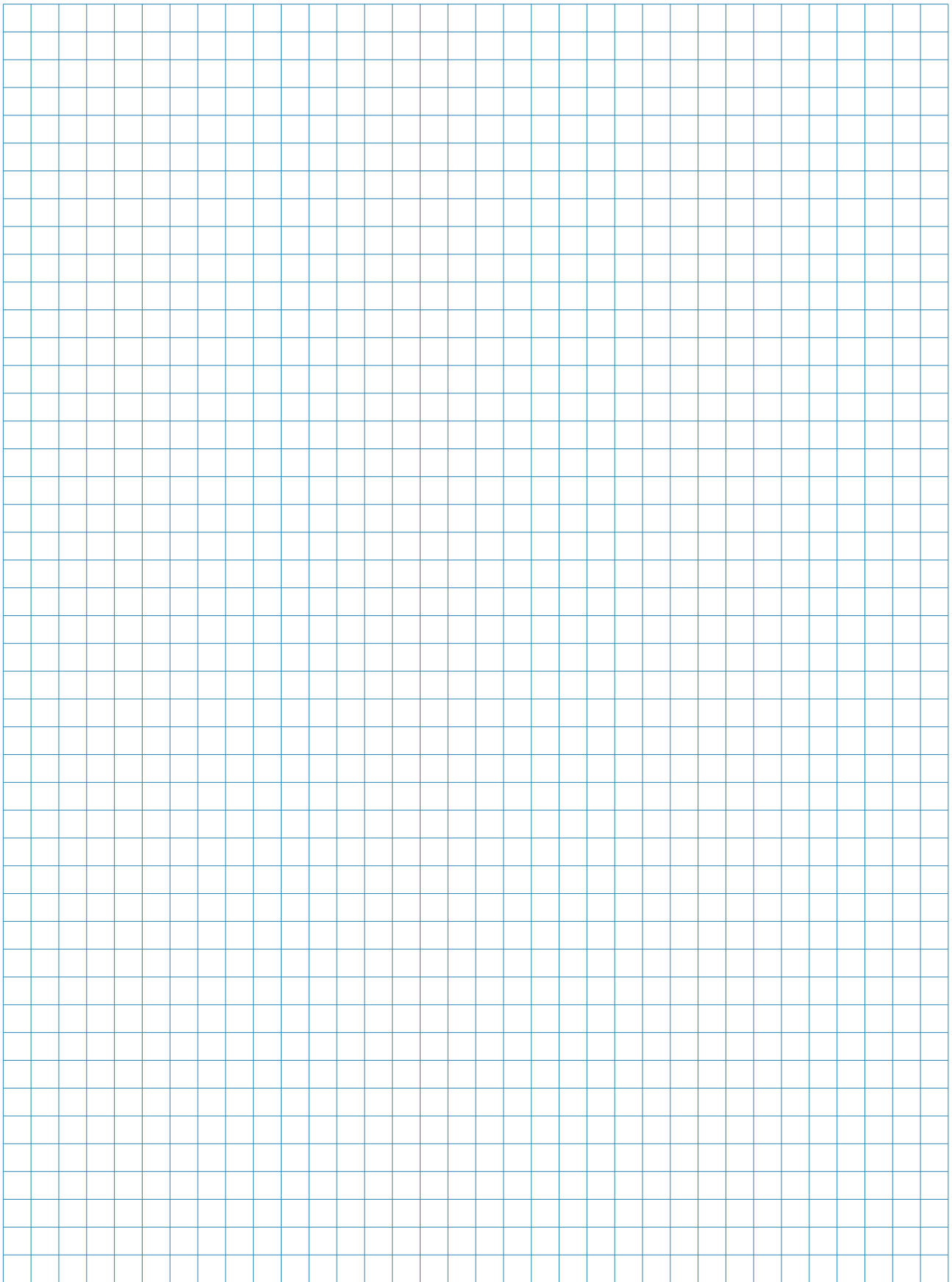
$$\text{fart} = \frac{\text{vejlængde}}{\text{tid}}$$

Eksempel:

100 meter løbes på 10 sekunder.

$$\text{Løberens gennemsnitsfart er } \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{t}}$$

Til egne notater



Måleenheder

SI-systemet er det internationale system for, hvordan man angiver måleenheder.

I overensstemmelse med SI-systemet bruges forkortelsen L for liter: 5 liter = 5 L.

I oversigterne herunder er sjældent anvendte enheder gråtonet.

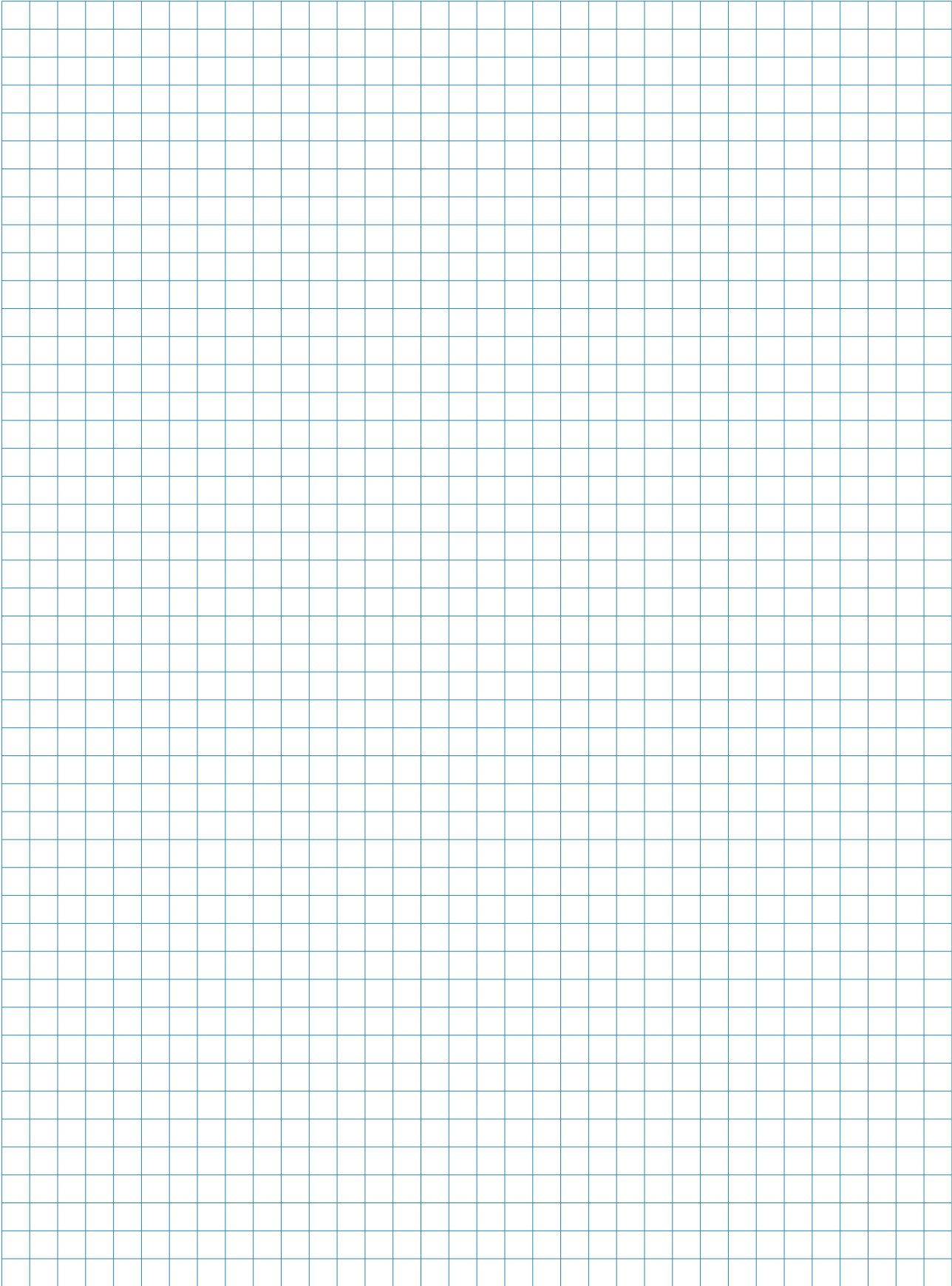
Længde

1 km	1 hm	1 dam	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m
10^3 m	10^2 m	10^1 m	10^0 m	10^{-1} m	10^{-2} m	10^{-3} m

Areal

1 km ²	1 hm ²	1 dam ²	1 m ²	1 dm ²	1 cm ²	1 mm ²
1000000 m ²	10000 m ²	100 m ²	1 m ²	0,01 m ²	0,0001 m ²	0,000001 m ²
10^6 m ²	10^4 m ²	10^2 m ²	10^0 m ²	10^{-2} m ²	10^{-4} m ²	10^{-6} m ²
	1 ha					

Til egne notater



Rumfang

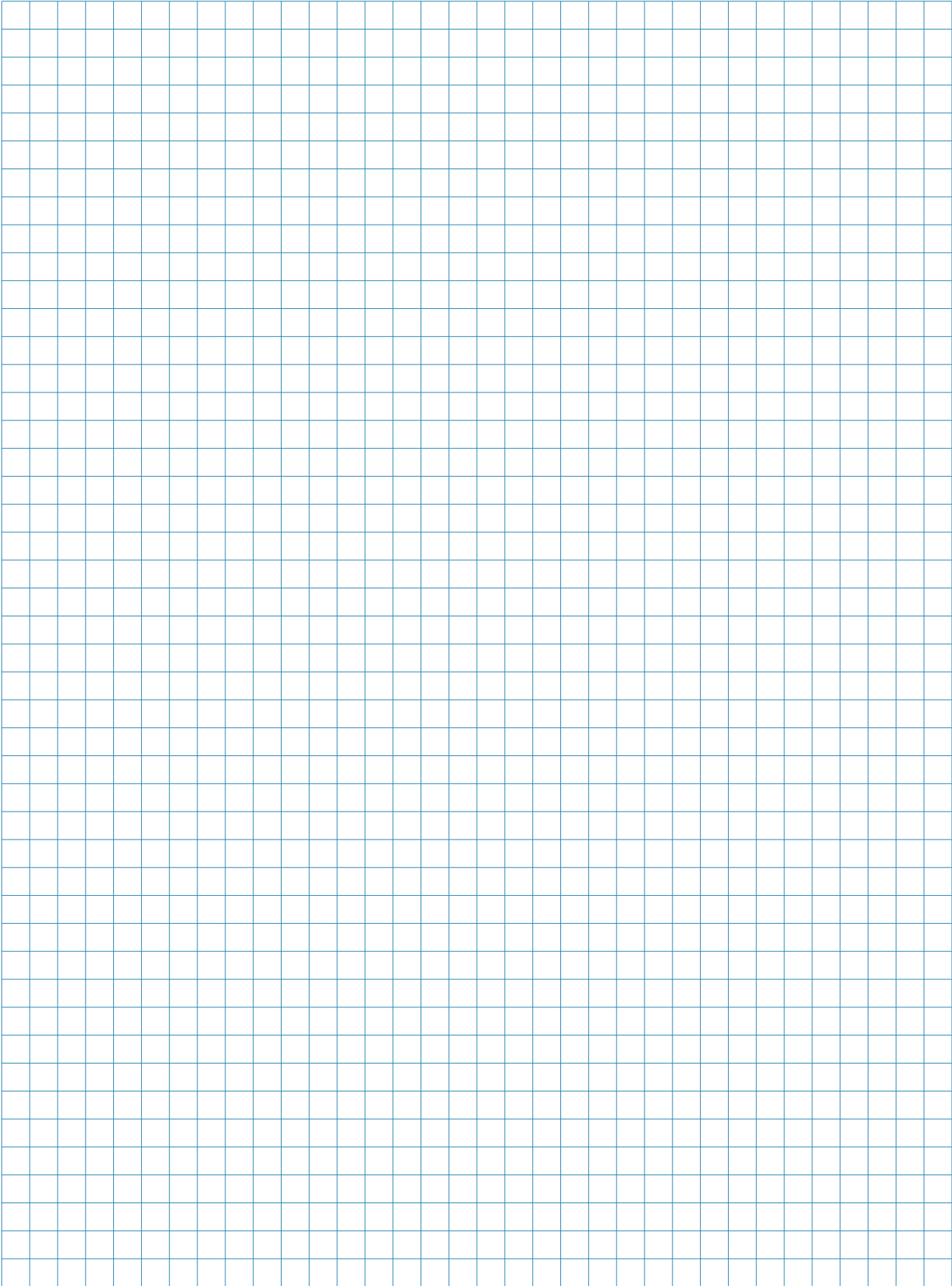
1 km ³	1 hm ³	1 dam ³	1 m ³	1 dm ³	1 cm ³	1 mm ³
1000000000 m ³	1000000 m ³	1000 m ³	1 m ³	0,001 m ³	0,000001 m ³	0,000000001 m ³
10 ⁹ m ³	10 ⁶ m ³	10 ³ m ³	10 ⁰ m ³	10 ⁻³ m ³	10 ⁻⁶ m ³	10 ⁻⁹ m ³
			1 kL	1 L	1 mL	

1 m ³			1 dm ³			1 cm ³
1 kL	1 hL	1 daL	1 L	1 dL	1 cL	1 mL
1000L	100L	10L	1L	0,1L	0,01L	0,001L
			10 dL			
			100 cL			
			1000 mL			

Vægt

1 t	1 kg	1 hg	1 dag	1 g	1 dg	1 cg	1 mg
1000000 g = 1000 kg	1000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g
				1000 mg	100 mg	10 mg	

Til egne notater



Præfiks	Titalspotens
T, tera	10^{12}
G, giga	10^9
M, mega	10^6
k, kilo	10^3
h, hekto	10^2
da, deka	10^1
d, deci	10^{-1}
c, centi	10^{-2}
m, milli	10^{-3}
μ , mikro	10^{-6}
n, nano	10^{-9}
p, pico	10^{-12}

Til egne notater

