

| Funktioner - Fase 2 – Anvende ikke-lineære funktioner til beskrivelse | | | |
|---|------|-------|-----------------------------------|
| Vurdering fra 1 til 5 (hvor 5 er højest) | | | |
| Læringsmål | Selv | Lærer | Beviser og forslag til forbedring |
| 1. Jeg kan løse problemer, der vedrører 2.gradsligninger . | | | |
| 2. Jeg kan løse problemer, der vedrører 2.gradsfunktioner . | | | |
| 3. Jeg kan løse problemer, der vedrører omvendt proportionalitet . | | | |
| 4. Jeg kan løse problemer der vedrører eksponentiel udvikling og kan opstille en formel, der trin for trin beskriver den udvikling. <i>(fx hvordan et antal bakterier vokser eksponentielt fra dag til dag)</i> | | | |
| 5. Jeg kan på baggrund af egne undersøgelser beskrive nr. n i en figurfølge <i>(fx trekanttal nr. n)</i> | | | |
| 6. Jeg kender til begreberne nederst. | | | |
| Begreber/noter: parabler, toppunkt, eksponentiel, proportional | | | |

7 Tegn og udfyld følgende tabel

| | | | | | | | | |
|------|---|----|----|----|---|----|---|----|
| a | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 2 | -2 |
| c | 2 | 2 | -2 | -2 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| -4ac | | | | | | | | |

8 Tegn og udfyld følgende tabel

| | a | b | c | b^2 | 4ac | $b^2 - 4ac$ |
|---|----|----|------|-------|-----|-------------|
| a | 5 | 6 | 1 | | | |
| b | 2 | -3 | -2 | | | |
| c | 2 | 4 | -2,5 | | | |
| d | -3 | 5 | 2 | | | |
| e | 4 | 4 | -3 | | | |
| f | -2 | 5 | 7 | | | |
| g | 3 | 8 | -3 | | | |

9 Lav andengradsligninger ud fra oplysningerne i **opgave 8** og løs ligningerne. kun a & b

10 Løs andengradsligningerne

a $3x^2 - 8x + 4 = 0$ b $2x^2 + 7x + 3 = 0$

11 Standselængden, S, for en bil kan udregnes af formlen

$$S = 0,008H^2 + 0,3 H$$

hvor H er hastigheden i km/t.

Udregn standselængden ved

a 20 km/t b 40 km/t c 80 km/t

e Hvor stor skal hastigheden være, hvis standselængden skal være 100 m?

12 (Folkeskolens udvidede afgangsprøve, december 1987)

Den vandmængde Q,
der kommer ud af et strålerør,
kan beregnes ved hjælp af formlen:

$$Q = k \cdot 0,208 \cdot d^2 \cdot \sqrt{H}$$

a Beregn vandmængden pr minut, når d er 18 mm, H er 10 m og k er 0,90.

b Hvilken betydning vil det have for Q, hvis H er 4 gange så stor?

c Hvilken diameter skal spidsen i et strålerør have, når k er 0,90, H er 36 m, og vandmængden skal være 647 liter pr minut?

Q er vandmængden målt i liter pr minut
d er diameteren i spidsen af strålerøret, målt i mm
H er vandets løftehøjde målt i m
k er et tal for modstanden i strålerøret (Tallet kan variere fra 0,80 til 0,96)

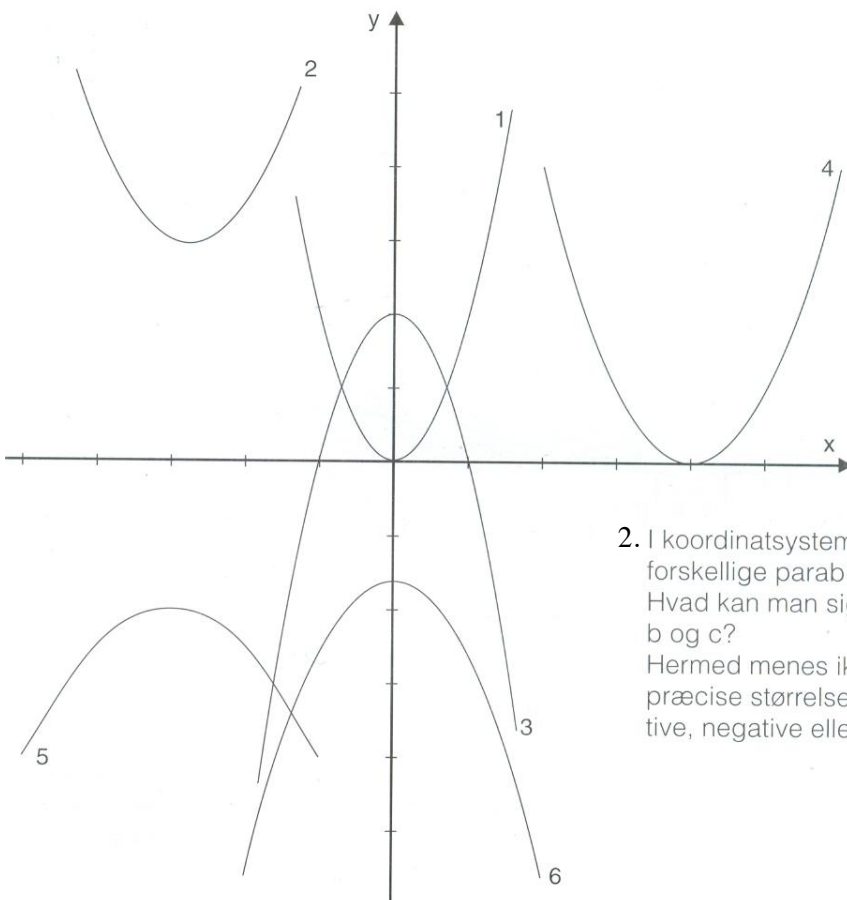
Andengradsligninger og funktioner

1. Ligningen for parablen er $y = ax^2 + bx + c$.
Hvis a, b og c på skift er enten +1 eller -1, kan man skrive otte forskellige ligninger for parablen.

a Udfyld et skema som dette:

| a | b | c | $y = ax^2 + bx + c$ |
|----|----|----|---------------------|
| +1 | +1 | +1 | |
| +1 | +1 | -1 | |
| +1 | -1 | +1 | |
| +1 | -1 | -1 | |
| -1 | +1 | +1 | |
| -1 | +1 | -1 | |
| -1 | -1 | +1 | |
| -1 | -1 | -1 | |

- b Tegn i samme koordinatsystem de otte parabler og giv en beskrivelse af, hvilken betydning a, b og c har for parablens udseende og beliggenhed.



2. I koordinatsystemet er der tegnet seks forskellige parabler. Hvad kan man sige om værdierne af a, b og c? Hermed menes ikke nødvendigvis de præcise størrelser; men om de er positive, negative eller nul.

3. Afbild funktionerne i samme koordinatsystem og find parablernes toppunkter.

a $y = 2x^2$

b $y = \frac{1}{4}x^2$

c $y = 4x^2 + 1$

d $y = -2x^2$

e $y = -\frac{1}{4}x^2$

f $y = -4x^2 + 1$

4. En parabel er i et koordinatsystem bestemt ved ligningen

$$y = x^2 - 4x + 5,$$

og en linie er bestemt ved ligningen

$$y = 16x - 31.$$

a Tegn parabelen og aflæs skæringspunkterne mellem parabelen og linien.

5. To parabler har ligningerne

$$y = -2x^2 \text{ og } y = 2x^2 + 3.$$

a Find et evt. maximums- og minimumspunkt for de to parabler.

b I hvilke intervaller på x-aksen er de voksende og aftagende?

c Parablerne spejles i x-aksen. Skriv de formler, der fremkommer for de nye parabler.

6. Hvor skærer disse parabler x-aksen og y-aksen?

a $y = x^2 - 2x - 3$

b $y = 3x^2 - 6x - 45$

c $y = x^2 - 2x + 3$

d $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x - 5$

e $y = x^2 - 10$

f $y = x^2 - 4x - 4$

7. Beregn værdien af $-x^2 + 2x + 15$ når

a $x = 8$

b $x = 3$

c $x = 2$

d $x = -3$

e $x = -4$

f $x = 6$

g $x = 5$

h $x = -2$

ANDENGRADSFUNKTION

En landmand vil indhegne en rektangulær eng til sine får. Han har 500 m trådhegn til rådighed, og vil have engens areal så stort som muligt. Findes der et største areal for engen, og hvis der gør, hvilken længde og bredde skal den så have?

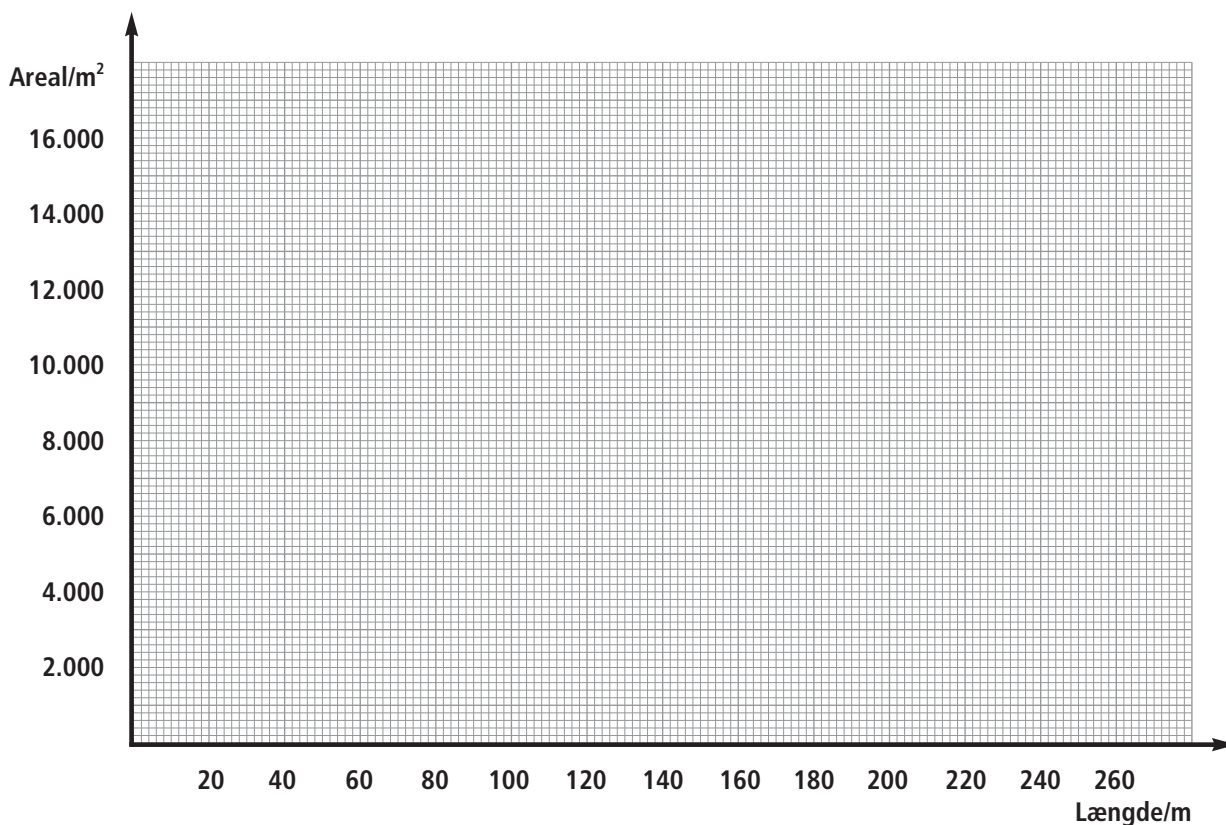
Et rektangel med omkredsen 500 m kan konstrueres på flere måder.

Tabellen herunder viser sammenhængen mellem længde og bredde i et rektangel, hvor omkredsen er 500.

1 Udfyld resten af tabellen

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|-------|-------|--------|--------|-----|-----|--------|--------|--------|-------|-----|-------|
| Længde | 5 | 10 | | | 75 | 100 | 125 | | 175 | 200 | | 240 | |
| Bredde | 245 | | 230 | 200 | | 150 | 125 | 100 | | 50 | 20 | 10 | 5 |
| Areal | | 2.400 | 4.600 | 10.000 | 13.125 | | | 15.000 | 13.125 | 10.000 | 4.600 | | 1.225 |

- 2 Tegn sammenhængen mellem længde og areal i koordinatsystemet herunder. eller i Geogebra
- 3 Aflæs på grafen om der findes et største areal for engen.
- 4 Hvilken længde og bredde skal engen have for at få det største areal? _____
- 5 Kan du ud fra grafen afgøre, om arealet er en funktion af længden? _____
- 6 Hvis længden af rektanlet benævnes l , så er bredden $250 - l$. Forklar hvorfor.
- _____
- 7 Tegn en graf der viser sammenhængen mellem længde og areal: $A = l \cdot b$



TOPPUNKT 1

Det grafiske billede af andengradsfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ er en parabel.

Hvis $a > 0$ har parabelen et minimumspunkt (der hvor kurven vender).

Hvis $a < 0$ har parabelen et maksimumspunkt (der hvor kurven vender).

Begge punkter kaldes under et parablens toppunkt.

Geogebra må bruges

I Hvis $b = 0$ og $c = 0$ er $f(x) = ax^2$

1 Tegn grafen for følgende andengradsfunktioner i samme koordinatsystem og aflæs toppunktet.

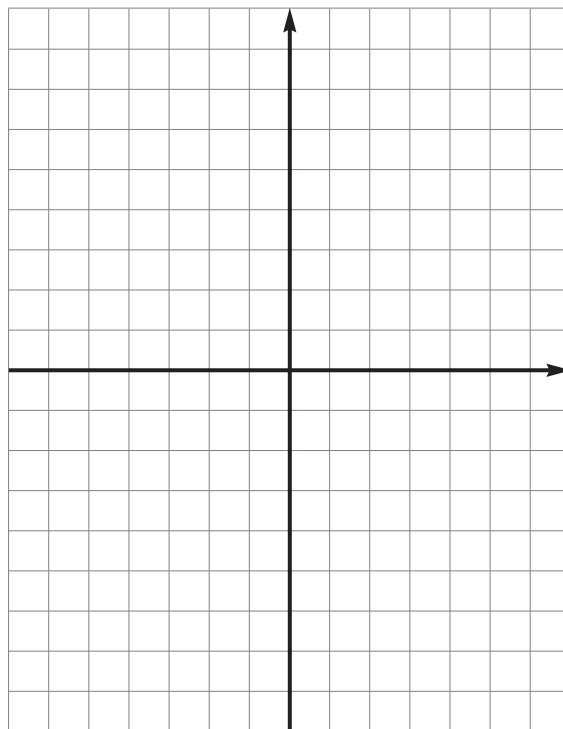
a $f(x) = 3x^2$

b $g(x) = -3x^2$

c $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

d $i(x) = -\frac{1}{2}x^2$

2 Hvor ligger toppunktet altid for funktioner af typen: $f(x) = ax^2$?



II Hvis $b = 0$ og $c \neq 0$ er $f(x) = ax^2 + c$

3 Tegn grafen for følgende andengradsfunktioner i samme koordinatsystem og aflæs toppunktet.

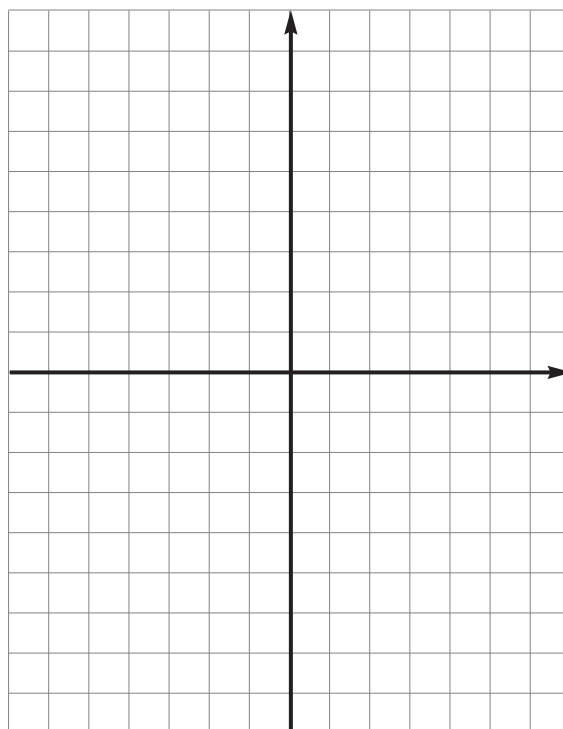
a $f(x) = 3x^2 + 2$

b $g(x) = -x^2 - 2$

c $i(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

d $i(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

4 Hvor ligger toppunktet altid for funktioner af typen: $f(x) = ax^2 + c$?



TOPPUNKT 2

Toppunkt

III Hvis $b \neq 0$ og $c \neq 0$ er $f(x) = ax^2 + bx + c$

Toppunktet $(x,y) =$
 $(-\frac{b}{2a} ; \frac{-D}{4a})$

For denne type funktioner er det nødvendigt at regne for at finde toppunktet.
Du kan bruge følgende formel:

1. koordinaten er $\frac{-b}{2a}$

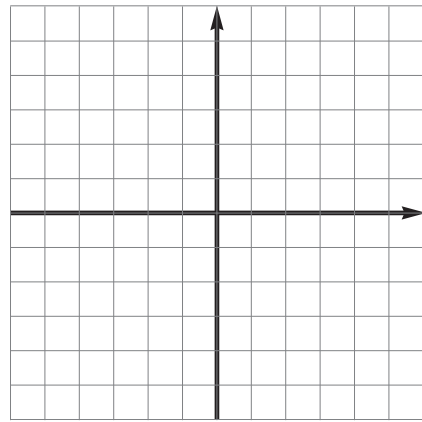
2. koordinaten er $\frac{-D}{4a}$ (hvor diskriminanten $D = b^2 - 4ac$)

5 Udregn toppunktet, og tegn grafen for følgende andengradsfunktioner.

Geogebra må bruges

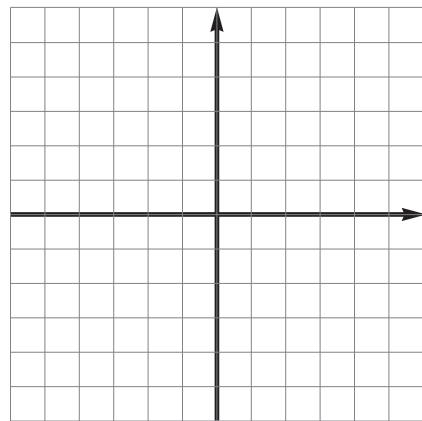
a $f(x) = x^2 + 2x + 1$ _____

b $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ _____



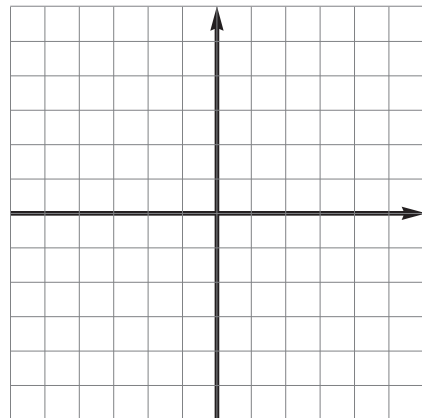
c $h(x) = x^2 + 4x - 1$ _____

d $i(x) = 2x^2 + 2x - 1$ _____



e $j(x) = -2x^2 + 4x + 2$ _____

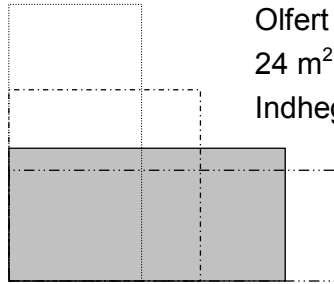
f $k(x) = 2x^2 - 6x - 4$ _____



Omvendt proportionalitet og hyperbler

1: Olferts høns

- a: Hvor bred bliver indhegningen, hvis den skal være 6 m lang?
- b: Hvor bred bliver indhegningen, hvis den skal være 8 m lang?
- c: Tegn og udfyld en tabel som denne:



Olfert skal lave en indhegning på 24 m² til sine høns.

Indhegningen skal være firkantet (rektangel eller kvadrat).

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| Den ene side i meter (x) | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Den anden side i meter (y) | | | | | | | | | | | |

- d: Tegn en graf ud fra tallene i tabellen.
1 cm = 1 m på begge tal-akser.
- e: Hvilken af disse funktioner passer til tabellen og grafen:

$$y = 24 \cdot x$$

$$y = \frac{24}{x}$$

$$y = \frac{x}{24}$$

- f: Hvad bliver sidelængden, hvis indhegningen er kvadratisk?
Marker det sted på grafen, som svarer til en kvadratisk indhegning.
- g: Er x og y omvendt proportionale?
- h: Tegn evt. også en graf, der passer til en indhegning på 15 m².

Graferne skal være bløde buer. Du må **ikke** tegne med lineal fra punkt til punkt.

2: Brian betaler tilbage

- a: Hvor meget skal Brian betale om måneden, hvis lånet skal betales tilbage på et år?
- b: Hvor meget skal Brian betale om måneden, hvis lånet skal betales tilbage på to år?
- c: Tegn og udfyld en tabel som denne:

| | | | | | | |
|----------------------|---|----|----|----|----|----|
| Antal måneder (x) | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |
| Afdrag pr. måned (y) | | | | | | |

Brian har lånt 15.000 kr. af sin mor. Lånet er rentefrit. Brian skal betale et fast afdrag hver måned.

- d: Tegn en graf ud fra tallene i tabellen.
1 cm = 2 måneder på x-aksen. 1 cm = 200 kr. på y-aksen
- e: Opstil en funktion der passer til tabellen og grafen.
- f: Er x og y omvendt proportionale?
- g: Hvor lang tid tager det at betale lånet tilbage, hvis Brian betaler 750 kr. pr. måned?
Marker dit svar på grafen.

5: Tegn grafen for denne funktion: $y = \frac{4}{x}$. Start med at udfylde en tabel som denne:

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|------|-----|---|---|---|---|
| x | -8 | -4 | -2 | -1 | -0,5 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| y | | | | | | | | | | |

Bemærk: Grafen består af to dele, som **ikke** hænger sammen.

Alle graferne fra opgave 5, 6 og 7 har symmetriakser. Kan du finde akserne?

6: Tegn graferne for disse funktioner:

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{2}{x} \qquad y = \frac{8}{x}$$

Du må gerne bruge det samme koordinatsystem som du brugte i opgave 5.

7: Tegn graferne for (nogle af) disse funktioner:

$$y = \frac{-1}{x} \qquad y = \frac{-2}{x} \qquad y = \frac{-4}{x} \qquad y = \frac{-8}{x}$$

8: To taxa-firmaer tager de viste priser.

- a: Hvad koster det at køre 4 km med Henry?
- b: Hvad bliver prisen pr. km, når man kører 4 km ?
- c: Lav og udfyld en tabel, som denne:

| |
|-------------------------|
| Henrys Hyrevogne |
| 8 kr. pr. km |
| 35 kr. i startgebyr |

| | | | | |
|---------------------------|-------|---|--------|----|
| Antal km (x) | 2 | 3 | o.s.v. | 10 |
| Pris pr. km hos Henry (y) | 25,50 | | | |

| |
|---------------------|
| Toms Taxa |
| 12 kr. pr. km |
| 15 kr. i startgebyr |

d: Tegn en graf for Henry i et koordinatsystem.

På x-aksen er 1 cm = 1 km. På y-aksen er 1 cm = 2 kr.

e: Hvilken af disse funktioner passer til tabellen og grafen:

$$y = \frac{8}{x} + 35 \qquad y = \frac{35}{x} + 8 \qquad y = \frac{x}{35} + 8$$

f: Lav også en tabel og en graf for Toms Taxa

g: Opstil en funktion for Toms Taxa.

h: Er x og y omvendt proportionale (undersøg begge funktioner)?

i: Hvor skærer graferne hinanden? ...og hvad betyder skæringspunktet?

j: Forestil dig, at du kører en meget, meget, meget lang tur.

- hvor lav kan prisen pr. km blive hos Henrys Hyrevogne?

- hvor lav kan prisen pr. km blive hos Toms Taxa?

Ekspponentialfunktioner

1 Lønstigning

I tabellen herunder er vist Kurts timeløn i år og de næste to år.

a: Vis hvorledes tallene er beregnet.

b: Tegn hele tabellen og udfyld den.

Hop evt. nogle af x-værdierne over.

(Det er helt urealistisk at regne med en fast lønstigning i 15 år, men find tallene alligevel).

| | | | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|---|-------|----|
| Antal år (x) | 0 | 1 | 2 | 3 | | 15 |
| Timeløn i kr. (y) | 80,00 | 84,00 | 88,20 | | | |

c: Tegn ud fra tallene en graf i et koordinatsystem, hvor 1 cm på x-aksen svarer til 1 år, og 1 cm på y-aksen svarer til 10 kr. (Grafen er ikke en ret linie - den buer en lille smule)

d: Hvilken af disse funktioner kan beskrive sammenhængen mellem x og y:

$$y = 4 \cdot x + 80$$

$$y = 80 \cdot 1,50^x$$

$$y = 80 \cdot 1,05^x$$

Nu skal du regne på Olferts løn.

e: Lav en tabel og en graf for Olferts løn 15 år frem.

f: Hvilken af disse funktioner kan beskrive Olferts løn:

$$y = 2,40 \cdot x + 120$$

$$y = 120 \cdot 1,20^x$$

$$y = 120 \cdot 1,02^x$$

g: Hvor mange år skal der gå, før Kurt og Olfert tjener det samme?

Kurt arbejder på Udby Marmeladefabrik.
Han tjener 80 kr. i timen.
Han bliver lovet en lønstigning på 5% hvert år de kommende år.

Olfert arbejder på Udby Margarinefabrik.
Han tjener 120 kr. i timen.
Han bliver lovet en lønstigning på 2% hvert år de kommende år.

3 Fadøl

Kurt og Olfert drikker fadøl på ”Den Gyldne Giraf”.
For at spare penge drikker de øllet langsomt.

Kurt køber en stor fadøl.

Hver time drikker han halvdelen (50%) af det øl,
som er tilbage i glasset.

- a:** Hvor meget øl har Kurt tilbage efter en time?
b: Hvor meget øl har Kurt tilbage efter to timer?
c: Tegn og udfyld en tabel som denne:

| Den Gyldne Giraf | |
|---------------------|--------|
| Stor Fadøl | |
| 500 ml..... | 35 kr. |
| Lille Fadøl | |
| 200 ml..... | 18 kr. |
| - en Fad gør glad - | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|---|-----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Antal timer (x) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Øl (ml) i Kurts glas (y) | 500 | | 125 | | | | | | | | |

- d:** Tegn ud fra tallene en graf i et koordinatsystem, hvor 1 cm på x-aksen svarer til 1 time, og 1 cm på y-aksen svarer til 20 ml øl.
e: Hvilken af disse funktioner kan beskrive sammenhængen mellem x og y:

$$y = 500 - 250 \cdot x \quad y = 500 \cdot 0,50^x \quad y = \frac{500}{x}$$

Olfert køber en lille fadøl.

Hver time drikker han en fjerdedel (25%) af det øl, som er tilbage i glasset.

- f:** Hvor meget øl har Olfert tilbage efter en time?
g: Lav også en tabel og en graf for Olfert.
h: Hvilken af disse funktioner passer på Olferts øl:
 $y = 200 - 50 \cdot x \quad y = 200 \cdot 0,25^x \quad y = 200 \cdot 0,75^x$
i: Aflæs på graferne hvornår der er lige meget øl i Kurts og Olferts glas?

4 Biler

- a:** Hvor meget er en ny Renaudi dyrere end en ny Skoyota?
Giv både et svar i kr. og et svar i procent.
Begge biler taber 20% i værdi om året.

- b:** Tegn og udfyld - for begge biler - en tabel som denne:

| Udby Auto | |
|---------------------|---------|
| Fabriksnye modeller | |
| Skoyota | 150.000 |
| Renaudi | 225.000 |

| | | | | | |
|-----------------|---|---|---|-----|----|
| Alder i år (x) | 0 | 1 | 2 | ... | 10 |
| Værdi i kr. (y) | | | | ... | |

- c:** Tegn grafer i et koordinatsystem. (x-aksen: 1 cm = 1 år; y-akse: 1 cm = 10.000 kr.)
d: Opstil funktioner for begge biler.
e: Hvor meget er en 10 år gammel Renaudi mere værd end en 10 år gammel Skoyota?
Giv både et svar i kr. og et svar i procent.

Udfyld skemaet.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| A | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
| B | 1 | 3 | 6 | | | | | |
| C | 1 | 4 | | | | | | |
| D | 1 | | | | | | | |
| E | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | |

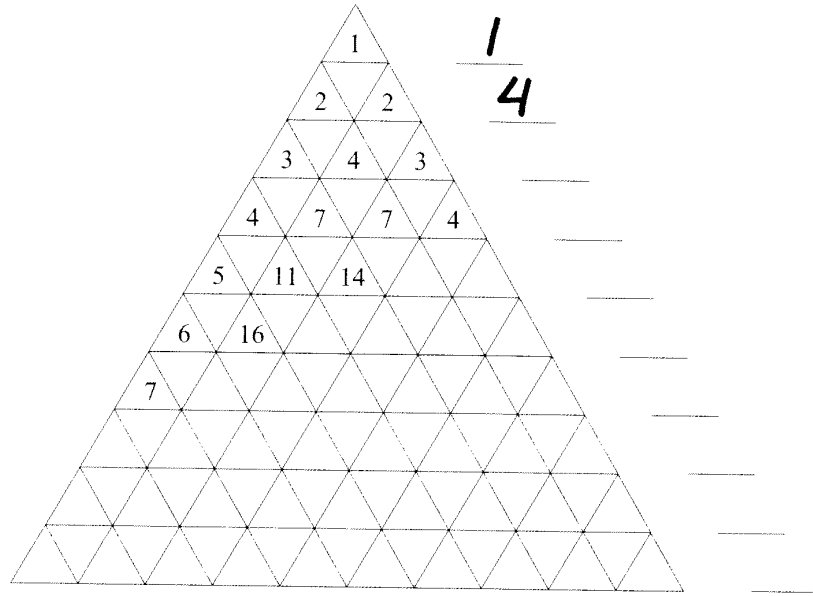
Beskriv 3 af talfølgerne.

Udfyld skemaet.

| | | | | | | | | | |
|-------------------------------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| n^2 | 0 | 1 | 4 | | | | | | |
| $2n^2$ | 0 | 2 | 8 | | | | | | |
| $3n$ | 0 | 3 | | | | | | | |
| $2n^2 + 3n - 2$ | -2 | | | | | | | | |
| $n + 2$ | 2 | | | | | | | | |
| $\frac{2n^2 + 3n - 2}{n + 2}$ | -1 | | | | | | | | |

Beskriv talfølgerne.

Gør taltrekanten færdig.



Beskriv de talfølger du kan se.

Udfyld indtastningsprogrammerne, så de giver tal i talfølgerne.

10, 20, 30, 40.....

9, 7, 5, 3.....

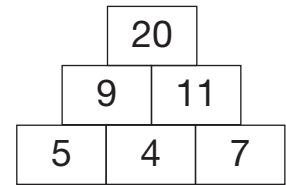
4, -8, 16, -32.....

64, 32, 16, 8.....

6

Sumpyramider

Figuren til højre viser en udfyldt sumpyramide.
I en sumpyramide skal tallet i hvert felt svare til summen af tallene i de to felter under tallet.



I Sumpyramide 1 på svararket er kun de tre nederste felter udfyldt med tal.

6.1 Udfyld resten af Sumpyramide 1 på svararket.

I Sumpyramide 2 på svararket er kun det øverste felt udfyldt med tallet 8.

6.2 Udfyld resten af Sumpyramide 2 på svararket med naturlige tal, der alle er forskellige.

I Sumpyramide 3 på svararket er nogle af felterne udfyldt med tal og den variable n .

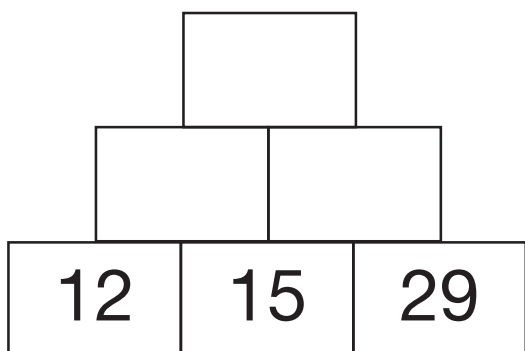
6.3 Udfyld resten af Sumpyramide 3 på svararket.

I Sumpyramide 4 på svararket er de nederste og det øverste felt udfyldt med tal og den variable p .

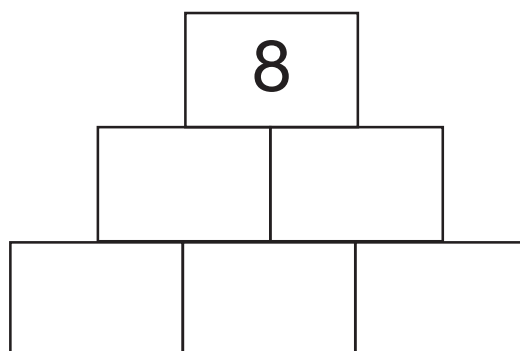
6.4 Du skal vise, at du kan finde værdien af p i Sumpyramide 4 på svararket ved at opstille og løse en ligning.

Opgave 6

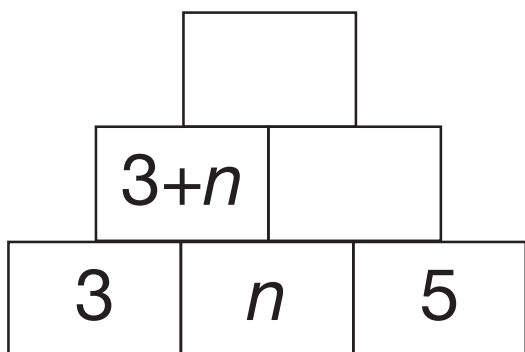
Sumpyramide 1



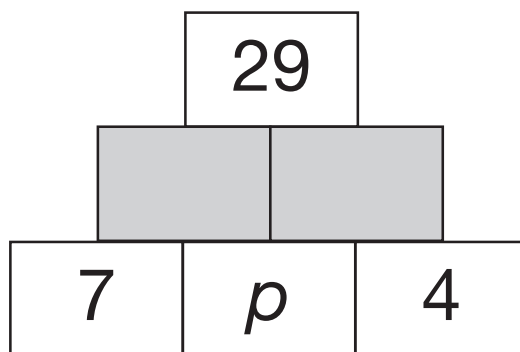
Sumpyramide 2



Sumpyramide 3



Sumpyramide 4



5

Regneopskrifter

En regneopskrift består af nogle linjer med en ordre i hver linje. Det tal, du får, når du følger en ordre i en linje, skal du regne videre med i den næste linje. Herunder er en regneopskrift.

1. Vælg et tal.
2. Læg 10 til.
3. Gang med 3.
4. Træk det tal, du valgte i linje 1, fra.
5. Divider med 2.
6. Træk 15 fra.

Hvis du vælger tallet 3 i linje 1, får du 13 i linje 2 og 39 i linje 3.

5.1 Hvilket tal ender du med i linje 6 i regneopskriften, hvis du vælger tallet 3 i linje 1?

Du kan også vælge andre tal end 3 i linje 1.

5.2 Undersøg, hvilken sammenhæng der er mellem det tal, du vælger i regneopskriftens linje 1, og det tal, du ender med i linje 6.

Fire elever fra 9. A bruger bogstavet n til at skrive hver sit regneudtryk, der skal vise beregningerne i regneopskriften øverst.

$$\text{Anton: } \frac{(n+10) \cdot 3 - n}{2} - 15$$

$$\text{Miriam: } \frac{n+10 \cdot 3 - n}{2} - 15$$

$$\text{Haider: } (n+10) \cdot 3 - n : 2 - 15$$

$$\text{Rune: } ((n+10) \cdot 3 - n) : 2 - 15$$

To af elevernes regneudtryk passer ikke med regneopskriften.

5.3 Hvilke to elevers regneudtryk passer ikke med regneopskriften? Du skal begrunde dit svar.

Eleverne vil finde på en regneopskrift, der altid ender med et tal, der er 10 større end det tal, de vælger i linje 1. De begynder med at skrive et regneudtryk, der skal vise beregningerne i regneopskriften.

Regneudtrykket er $\frac{m \cdot 6}{3} - m + 10$.

5.4 Du skal vise ved at omskrive, at værdien af regneudtrykket er 10 større end m .