

<b>Funktioner - Fase 2 – Anvende ikke-lineære funktioner til beskrivelse</b>			
<i>Vurdering fra 1 til 5 (hvor 5 er højest)</i>			
Læringsmål	Selv	Lærer	Beviser og forslag til forbedring
1. Jeg kan løse problemer, der vedrører <b>2.gradsligninger</b> .			
2. Jeg kan løse problemer, der vedrører <b>2.gradsfunktioner</b> .			
3. Jeg kan løse problemer, der vedrører <b>omvendt proportionalitet</b> .			
4. Jeg kan løse problemer der vedrører <b>eksponentiel udvikling</b> og kan opstille en formel, der trin for trin beskriver den udvikling.  <i>(fx hvordan et antal bakterier vokser eksponentielt fra dag til dag)</i>			
5. Jeg kan på baggrund af egne undersøgelser beskrive <b>nr. n</b> i en figurfølge  <i>(fx trekanttal nr. n)</i>			
6. Jeg kender til begreberne nederst.			
<b>Begreber/noter:</b> parabler, toppunkt, eksponentiel, proportional			

7 Tegn og udfyld følgende tabel

a	1	-1	1	-1	1
c	2	2	-2	-2	0
-4ac					

8 Tegn og udfyld følgende tabel

	a	b	c	$b^2$	4ac	$b^2 - 4ac$
a	5	6	1			
b	2	-3	-2			
c	2	4	-2,5			
d	-3	5	2			
e	4	4	-3			

9 Lav andengradsligninger ud fra oplysningerne i **opgave 8** og løs ligningerne. kun a & b

10 Løs andengradsligning

a  $3x^2 - 8x + 4 = 0$

11 Standselængden, S, for en bil kan udregnes af formlen

$$S = 0,008H^2 + 0,3 H$$

hvor H er hastigheden i km/t.

Udregn standselængden ved

a 20 km/t

b 40 km/t

e Hvor stor skal hastigheden være, hvis standselængden skal være 100 m?

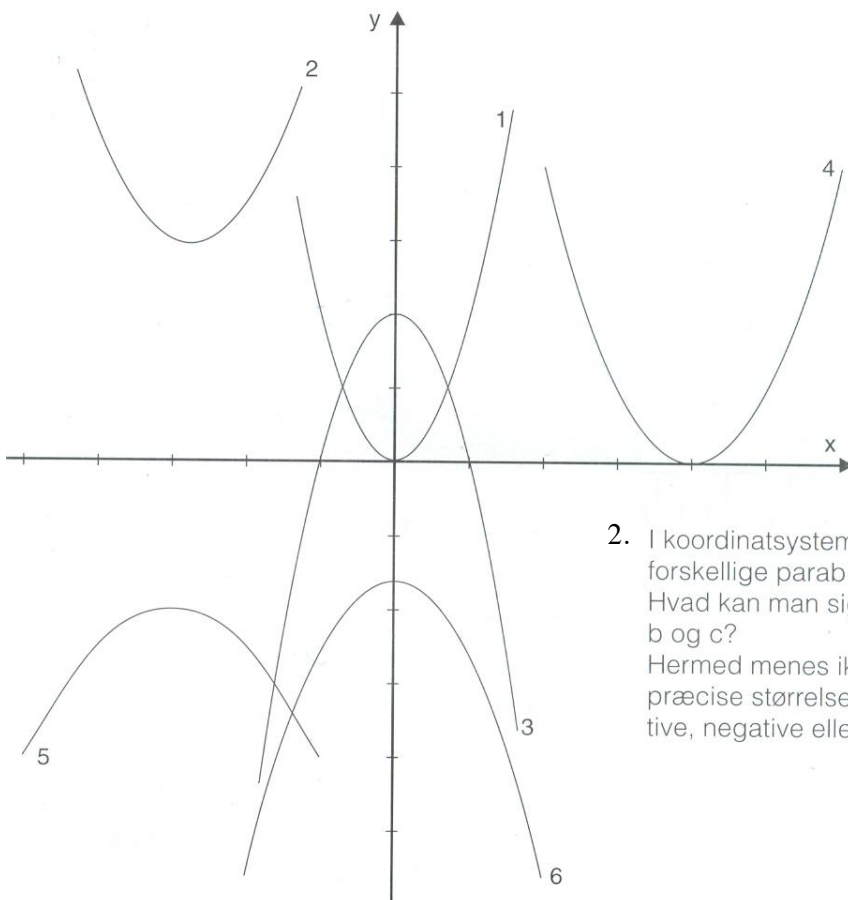
# Andengradsligninger og funktioner

1. Ligningen for parablen er  $y = ax^2 + bx + c$ .  
Hvis a, b og c på skift er enten +1 eller -1, kan man skrive otte forskellige ligninger for parablen.

a Udfyld et skema som dette:

a	b	c	$y = ax^2 + bx + c$
+1	+1	+1	
+1	+1	-1	
+1	-1	+1	
+1	-1	-1	
-1	+1	+1	
-1	+1	-1	
-1	-1	+1	
-1	-1	-1	

- b Tegn i samme koordinatsystem de otte parabler og giv en beskrivelse af, hvilken betydning a, b og c har for parablens udseende og beliggenhed.



2. I koordinatsystemet er der tegnet seks forskellige parabler. Hvad kan man sige om værdierne af a, b og c? Hermed menes ikke nødvendigvis de præcise størrelser; men om de er positive, negative eller nul.

3. Afbild funktionerne i samme koordinatsystem og find parablernes toppunkter.

**a**  $y = 2x^2$

**b**  $y = \frac{1}{4}x^2$

**c**  $y = 4x^2 + 1$

4. En parabel er i et koordinatsystem bestemt ved ligningen

$$y = x^2 - 4x + 5,$$

og en linie er bestemt ved ligningen

$$y = 16x - 31.$$

**a** Tegn parablen og aflæs skæringspunkterne mellem parablen og linien.

To parabler har ligningerne

$$y = -2x^2 \text{ og } y = 2x^2 + 3.$$

**a** Find et evt. maximums- og minimumspunkt for de to parabler.

5. Hvor skærer disse parabler x-aksen og y-aksen?

**a**  $y = x^2 - 2x - 3$

**b**  $y = 3x^2 - 6x - 45$

**c**  $y = x^2 - 2x + 3$

6. Beregn værdien af  $-x^2 + 2x + 15$  når

**a**  $x = 8$

**b**  $x = 3$

**c**  $x = 2$

# ANDENGRADSFUNKTION

En landmand vil indhegne en rektangulær eng til sine får. Han har 500 m trådhegn til rådighed, og vil have engens areal så stort som muligt. Findes der et største areal for engen, og hvis der gør, hvilken længde og bredde skal den så have?

Et rektangel med omkredsen 500 m kan konstrueres på flere måder.

Tabellen herunder viser sammenhængen mellem længde og bredde i et rektangel, hvor omkredsen er 500.

1 Udfyld resten af tabellen

Længde	5	10			75	100	125		175
Bredde	245		230	200		150	125	100	
Areal		2.400	4.600	10.000	13.125			15.000	13.125

2 Tegn sammenhængen mellem længde og areal i koordinatsystemet herunder.

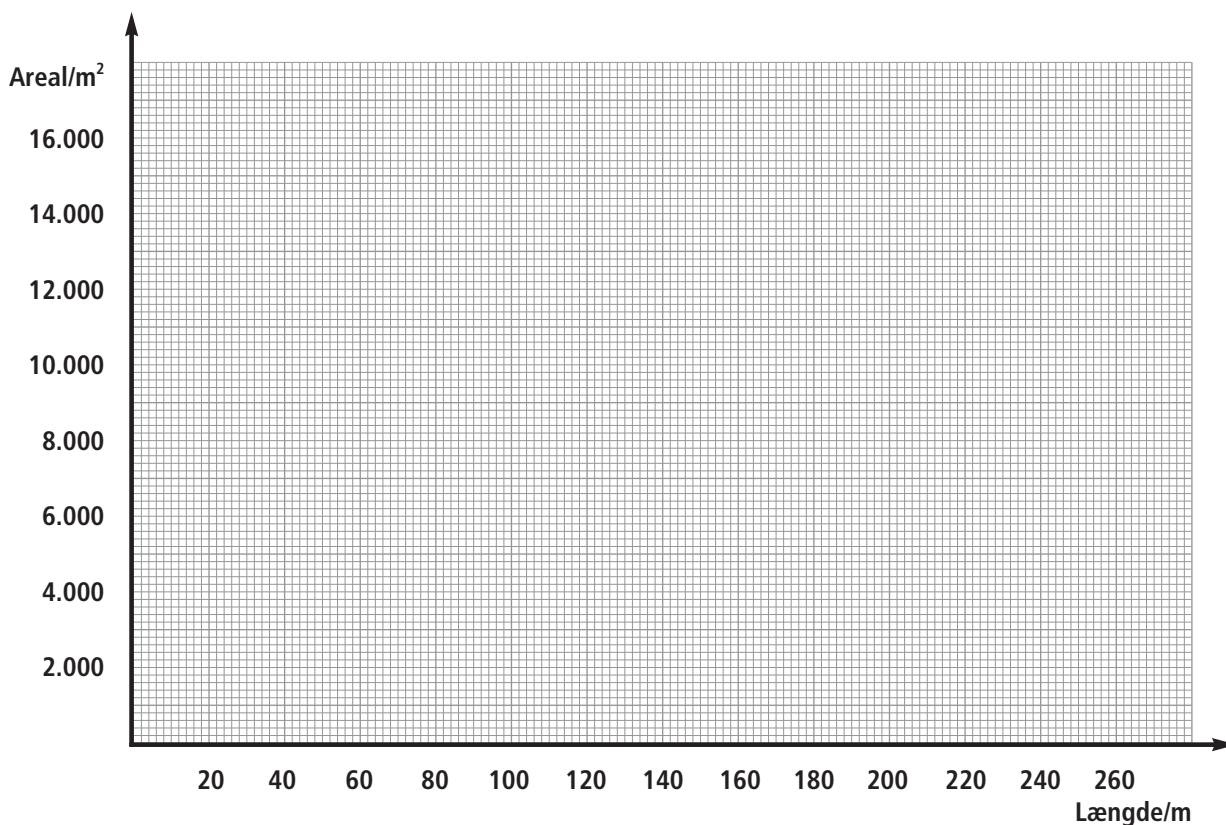
eller i Geogebra

3 Aflæs på grafen om der findes et største areal for engen.

4 Hvilken længde og bredde skal engen have for at få det største areal? \_\_\_\_\_

5 Kan du ud fra grafen afgøre, om arealet er en funktion af længden? \_\_\_\_\_

7 Tegn en graf der viser sammenhængen mellem længde og areal:  $A = l \cdot b$



# TOPPUNKT 1

Det grafiske billede af andengradsfunktionen  $f(x) = ax^2 + bx + c$  er en parabel.

Hvis  $a > 0$  har parabelen et minimumspunkt (dér hvor kurven vender).

Hvis  $a < 0$  har parabelen et maksimumspunkt (dér hvor kurven vender).

Begge punkter kaldes under et parablens toppunkt.

Geogebra må bruges

**I** Hvis  $b = 0$  og  $c = 0$  er  $f(x) = ax^2$

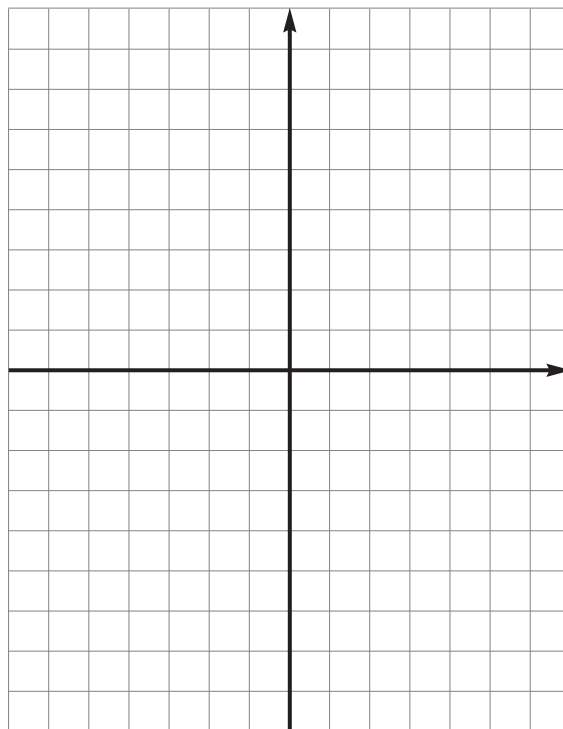
**1** Tegn grafen for følgende andengradsfunktioner i samme koordinatsystem og aflæs toppunktet.

**a**  $f(x) = 3x^2$

**b**  $g(x) = -3x^2$

**2** Hvor ligger toppunktet altid for funktioner af typen:  $f(x) = ax^2$ ?

\_\_\_\_\_



**II** Hvis  $b = 0$  og  $c \neq 0$  er  $f(x) = ax^2 + c$

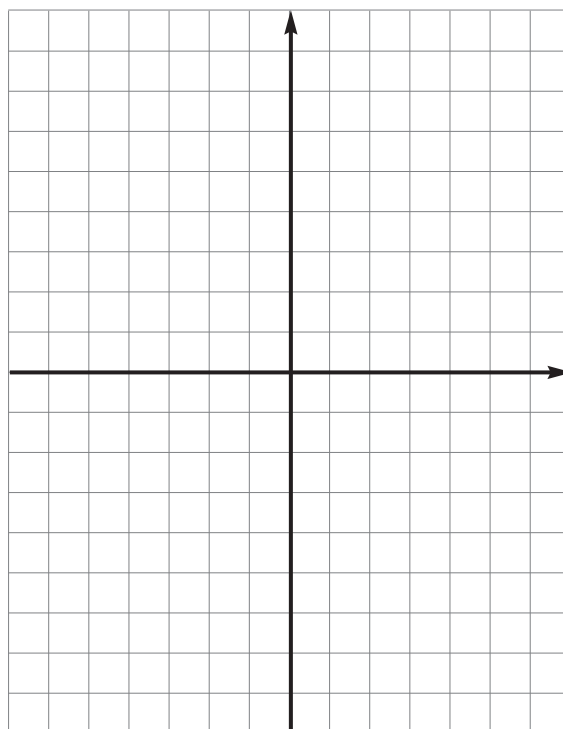
**3** Tegn grafen for følgende andengradsfunktioner i samme koordinatsystem og aflæs toppunktet.

**a**  $f(x) = 3x^2 + 2$

**b**  $g(x) = -x^2 - 2$

**4** Hvor ligger toppunktet altid for funktioner af typen:  $f(x) = ax^2 + c$ ?

\_\_\_\_\_



# TOPPUNKT 2

## Toppunkt

III Hvis  $b \neq 0$  og  $c \neq 0$  er  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Toppunktet  $(x,y) =$   
 $(-\frac{b}{2a} ; -\frac{D}{4a})$

For denne type funktioner er det nødvendigt at regne for at finde toppunktet.  
Du kan bruge følgende formel:

1. koordinaten er  $\frac{-b}{2a}$

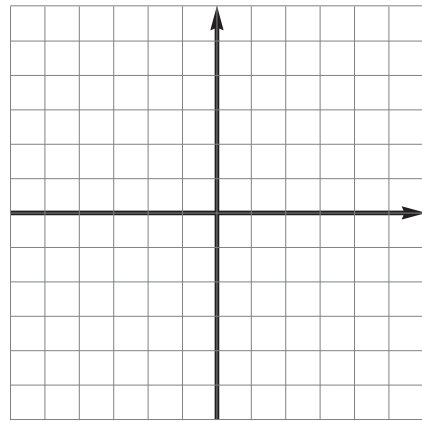
2. koordinaten er  $\frac{-D}{4a}$  (hvor diskriminanten  $D = b^2 - 4ac$ )

5 Udregn toppunktet, og tegn grafen for følgende andengradsfunktioner.

Geogebra må bruges

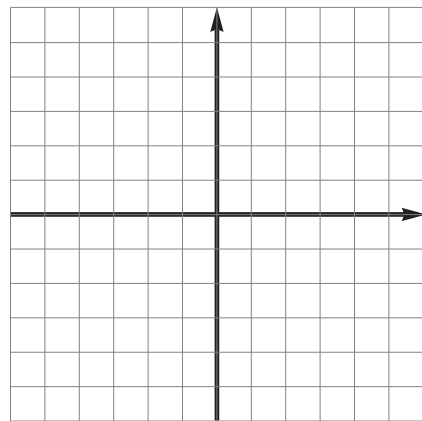
a  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  \_\_\_\_\_

b  $g(x) = -x^2 + 2x + 4$  \_\_\_\_\_



c  $h(x) = x^2 + 4x - 1$  \_\_\_\_\_

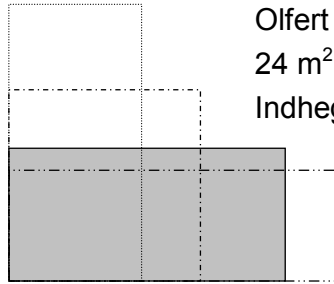
d  $i(x) = 2x^2 + 2x - 1$  \_\_\_\_\_



## Omvendt proportionalitet og hyperbler

### 1: Olferts høns

- a:** Hvor bred bliver indhegningen, hvis den skal være 6 m lang?
- b:** Hvor bred bliver indhegningen, hvis den skal være 8 m lang?
- c:** Tegn og udfyld en tabel som denne:



Olfert skal lave en indhegning på 24 m<sup>2</sup> til sine høns.

Indhegningen skal være firkantet (rektangel eller kvadrat).

Den ene side i meter (x)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Den anden side i meter (y)											

- d:** Tegn en graf ud fra tallene i tabellen.  
1 cm = 1 m på begge tal-akser.
- e:** Hvilken af disse funktioner passer til tabellen og grafen:
- $$y = 24 \cdot x \qquad y = \frac{24}{x} \qquad y = \frac{x}{24}$$
- f:** Hvad bliver sidelængden, hvis indhegningen er kvadratisk?  
Marker det sted på grafen, som svarer til en kvadratisk indhegning.
- g:** Er x og y omvendt proportionale?
- h:** Tegn evt. også en graf, der passer til en indhegning på 15 m<sup>2</sup>.

Graferne skal være bløde buer. Du må **ikke** tegne med lineal fra punkt til punkt.

### 2: Brian betaler tilbage

- a:** Hvor meget skal Brian betale om måneden, hvis lånet skal betales tilbage på et år?
- b:** Hvor meget skal Brian betale om måneden, hvis lånet skal betales tilbage på to år?
- c:** Tegn og udfyld en tabel som denne:

Brian har lånt 15.000 kr. af sin mor. Lånet er rentefrit. Brian skal betale et fast afdrag hver måned.

Antal måneder (x)	6	12	18	24	30	36
Afdrag pr. måned (y)						

- d:** Tegn en graf ud fra tallene i tabellen.  
1 cm = 2 måneder på x-aksen. 1 cm = 200 kr. på y-aksen
- e:** Opstil en funktion der passer til tabellen og grafen.
- f:** Er x og y omvendt proportionale?
- g:** Hvor lang tid tager det at betale lånet tilbage, hvis Brian betaler 750 kr. pr. måned?  
Marker dit svar på grafen.



5: Tegn grafen for denne funktion:  $y = \frac{4}{x}$ . Start med at udfylde en tabel som denne:

x	-8	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4	8
y										

Bemærk: Grafen består af to dele, som **ikke** hænger sammen.

Alle graferne fra opgave 5, 6 og 7 har symmetriakser.

6: Tegn graferne for disse funktioner:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = \frac{8}{x}$$

Du må gerne bruge det samme koordinatsystem som du brugte i opgave 5.

7: Tegn graferne for (nogle af) disse funktioner:

$$y = \frac{-1}{x}$$

$$y = \frac{-2}{x}$$

## Ekspponentialfunktioner

### 1 Lønstigning

I tabellen herunder er vist Kurts timeløn i år og de næste to år.

**a:** Vis hvorledes tallene er beregnet.

**b:** Tegn hele tabellen og udfyld den.

Hop evt. nogle af x-værdierne over.

(Det er helt urealistisk at regne med en fast lønstigning i 15 år, men find tallene alligevel).

Antal år (x)	0	1	2	3	.....	15
Timeløn i kr. (y)	80,00	84,00	88,20		.....	

**c:** Tegn ud fra tallene en graf i et koordinatsystem, hvor 1 cm på x-aksen svarer til 1 år, og 1 cm på y-aksen svarer til 10 kr. (Grafen er ikke en ret linie - den buer en lille smule)

**d:** Hvilken af disse funktioner kan beskrive sammenhængen mellem x og y:

$$y = 4 \cdot x + 80$$

$$y = 80 \cdot 1,50^x$$

$$y = 80 \cdot 1,05^x$$

Nu skal du regne på Olferts løn.

**e:** Lav en tabel og en graf for Olferts løn 15 år frem.

**f:** Hvilken af disse funktioner kan beskrive Olferts løn:

$$y = 2,40 \cdot x + 120$$

$$y = 120 \cdot 1,20^x$$

$$y = 120 \cdot 1,02^x$$

**g:** Hvor mange år skal der gå, før Kurt og Olfert tjener det samme?

Kurt arbejder på Udby Marmeladefabrik.  
Han tjener 80 kr. i timen.  
Han bliver lovet en lønstigning på 5% hvert år de kommende år.

Olfert arbejder på Udby Margarinefabrik.  
Han tjener 120 kr. i timen.  
Han bliver lovet en lønstigning på 2% hvert år de kommende år.

**3** Fadøl

Kurt og Olfert drikker fadøl på ”Den Gyldne Giraf”.

For at spare penge drikker de øllet langsomt.

Kurt køber en stor fadøl.

Hver time drikker han halvdelen (50%) af det øl, som er tilbage i glasset.

**a:** Hvor meget øl har Kurt tilbage efter en time?

**b:** Hvor meget øl har Kurt tilbage efter to timer?

**c:** Tegn og udfyld en tabel som denne:

Antal timer (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Øl (ml) i Kurts glas (y)	500		125								

**d:** Tegn ud fra tallene en graf i et koordinatsystem, hvor 1 cm på x-aksen svarer til 1 time, og 1 cm på y-aksen svarer til 20 ml øl.

**e:** Hvilken af disse funktioner kan beskrive sammenhængen mellem x og y:

$$y = 500 - 250 \cdot x \quad y = 500 \cdot 0,5^x \quad y = \frac{500}{x}$$

Olfert køber en lille fadøl.

Hver time drikker han en fjerdedel (25%) af det øl, som er tilbage i glasset.

**f:** Hvor meget øl har Olfert tilbage efter en time?

**g:** Lav også en tabel og en graf for Olfert.

**h:** Hvilken af disse funktioner passer på Olferts øl:

$$y = 200 - 50 \cdot x \quad y = 200 \cdot 0,25^x \quad y = 200 \cdot 0,75^x$$

**i:** Aflæs på graferne hvornår der er lige meget øl i Kurts og Olferts glas?

Den Gyldne Giraf	
Stor Fadøl	
500 ml.....	35 kr.
Lille Fadøl	
200 ml.....	18 kr.
- en Fad gør glad -	

Udfyld skemaet.

	1	1	1	1	1	1	1	1
A	1	2	3	4				
B	1	3	6					
C	1	4						
D	1							
E								
F								
G								

Beskriv 3 af talfølgerne.

---



---



---

Udfyld skemaet.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2$	0	1	4						
$2n^2$	0	2	8						
$3n$	0	3							
$2n^2 + 3n - 2$	-2								
$n + 2$	2								
$\frac{2n^2 + 3n - 2}{n + 2}$	-1								

Beskriv talfølgerne.

---



---

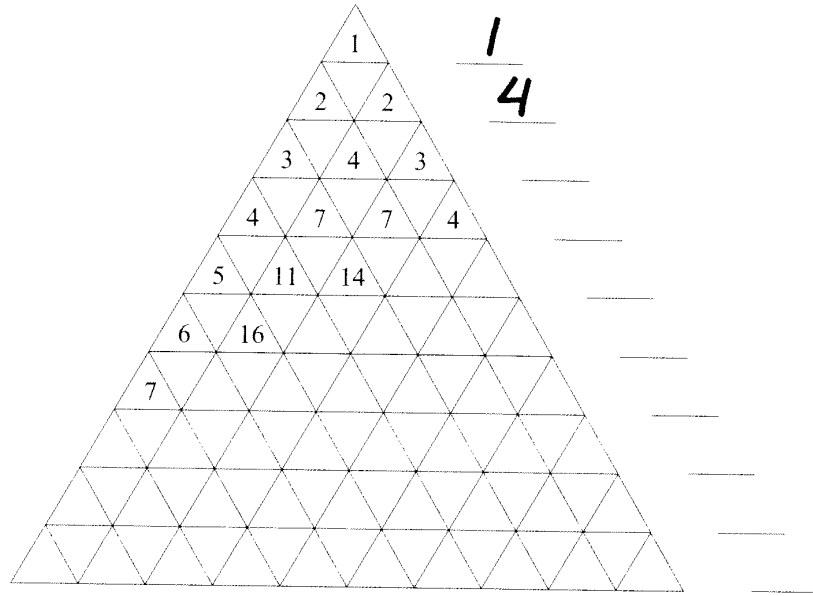


---



---

Gør taltrekanten færdig.



Beskriv de talfølger du kan se.

---



---



---

Udfyld indtastningsprogrammerne, så de giver tal i talfølgerne.

10, 20, 30, 40.....

9, 7, 5, 3.....

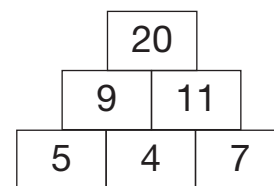
4, -8, 16, -32.....

64, 32, 16, 8.....

# 6

## Sumpyramider

Figuren til højre viser en udfyldt sumpyramide.  
I en sumpyramide skal tallet i hvert felt svare til summen af tallene i de to felter under tallet.



I Sumpyramide 1 på svararket er kun de tre nederste felter udfyldt med tal.

**6.1** Udfyld resten af Sumpyramide 1 på svararket.

I Sumpyramide 2 på svararket er kun det øverste felt udfyldt med tallet 8.

**6.2** Udfyld resten af Sumpyramide 2 på svararket med naturlige tal, der alle er forskellige.

I Sumpyramide 3 på svararket er nogle af felterne udfyldt med tal og den variable  $n$ .

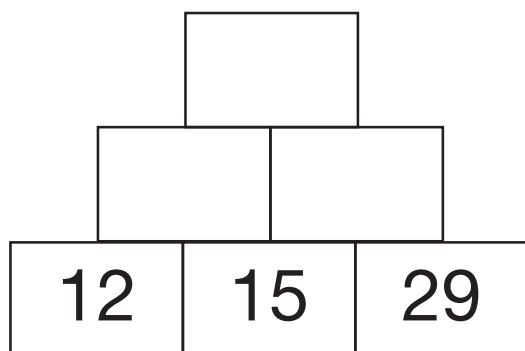
**6.3** Udfyld resten af Sumpyramide 3 på svararket.

I Sumpyramide 4 på svararket er de nederste og det øverste felt udfyldt med tal og den variable  $p$ .

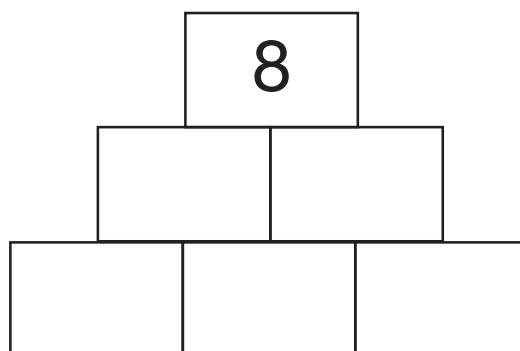
**6.4** Du skal vise, at du kan finde værdien af  $p$  i Sumpyramide 4 på svararket ved at opstille og løse en ligning.

## Opgave 6

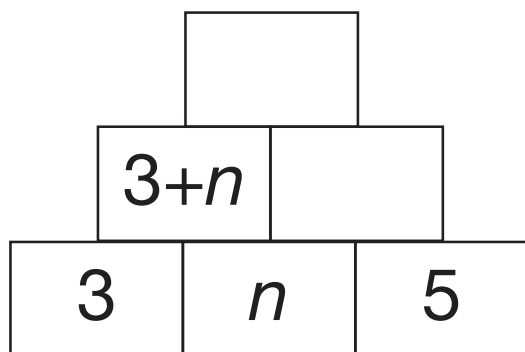
Sumpyramide 1



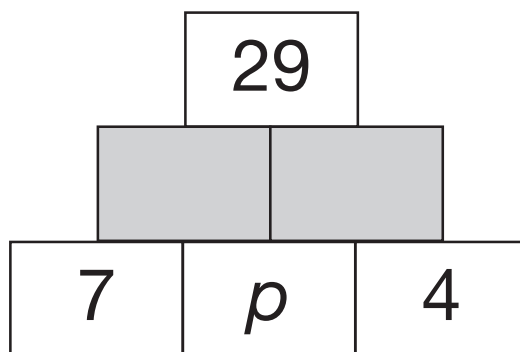
Sumpyramide 2



Sumpyramide 3



Sumpyramide 4



# 5

## Regneopskrifter

En regneopskrift består af nogle linjer med en ordre i hver linje. Det tal, du får, når du følger en ordre i en linje, skal du regne videre med i den næste linje. Herunder er en regneopskrift.

1. Vælg et tal.
2. Læg 10 til.
3. Gang med 3.
4. Træk det tal, du valgte i linje 1, fra.
5. Divider med 2.
6. Træk 15 fra.

Hvis du vælger tallet 3 i linje 1, får du 13 i linje 2 og 39 i linje 3.

**5.1** Hvilket tal ender du med i linje 6 i regneopskriften, hvis du vælger tallet 3 i linje 1?

Du kan også vælge andre tal end 3 i linje 1.

**5.2** Undersøg, hvilken sammenhæng der er mellem det tal, du vælger i regneopskriftens linje 1, og det tal, du ender med i linje 6.

Fire elever fra 9. A bruger bogstavet  $n$  til at skrive hver sit regneudtryk, der skal vise beregningerne i regneopskriften øverst.

$$\text{Anton: } \frac{(n+10) \cdot 3 - n}{2} - 15$$

$$\text{Miriam: } \frac{n+10 \cdot 3 - n}{2} - 15$$

$$\text{Haider: } (n+10) \cdot 3 - n : 2 - 15$$

$$\text{Rune: } ((n+10) \cdot 3 - n) : 2 - 15$$

To af elevernes regneudtryk passer ikke med regneopskriften.

**5.3** Hvilke to elevers regneudtryk passer ikke med regneopskriften? Du skal begrunde dit svar.

Eleverne vil finde på en regneopskrift, der altid ender med et tal, der er 10 større end det tal, de vælger i linje 1. De begynder med at skrive et regneudtryk, der skal vise beregningerne i regneopskriften.

Regneudtrykket er  $\frac{m \cdot 6}{3} - m + 10$ .

**5.4** Du skal vise ved at omskrive, at værdien af regneudtrykket er 10 større end  $m$ .